

Логика и алгоритмы (весна 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 9

Лемма 9.1 (Лемма о свежей константе)

Пусть T — теория 1-го порядка в сигнатуре Ω , c — константа, которая не встречается в T . Пусть $\varphi(x)$ — формула сигнатуры Ω с единственным параметром x или замкнутая,¹ и пусть $T \vdash \varphi(c)$.² Тогда $T \vdash \forall x \varphi(x)$.

Доказательство (I) Сначала докажем, что $T \vdash \varphi(z)$ для переменной z , которая не встречается в выводе $\varphi(c)$. Для этого надо в выводе $\varphi(c)$ везде заменить c на z и доказать, что получится корректный вывод в T .

Доказательство проводим индукцией по длине вывода $\varphi(c)$. Поскольку в процессе вывода могут появляться параметры, мы теперь не будем предполагать, что $\varphi(c)$ замкнута.

1. Если $\varphi(c)$ — подстановочный пример аксиомы CL , то и $\varphi(z)$ — пример аксиомы CL . Действительно, если $\varphi(c) \doteq A(\alpha_1(c), \dots, \alpha_n(c))$, где $A(p_1, \dots, p_n)$ — пропозициональная формула (аксиома), $\alpha_1(c), \dots, \alpha_n(c)$ — формулы 1-го порядка, то $\varphi(z) \doteq A(\alpha_1(z), \dots, \alpha_n(z))$.³

2. Если $\varphi(c)$ — аксиома A12, то

$$\varphi(c) \doteq \forall y (\alpha(c) \rightarrow \beta(c)) \rightarrow (\alpha(c) \rightarrow \forall y \beta(c)),$$

$y \notin \text{Par}(\alpha(c))$. По условию y не совпадает с z . Поэтому $y \notin \text{Par}(\alpha(z))$, и

$$\varphi(y) \doteq \forall y (\alpha(z) \rightarrow \beta(z)) \rightarrow (\alpha(z) \rightarrow \forall y \beta(z))$$

— тоже аксиома A12.

Аналогично поступаем с A13.

3. Пусть $\varphi(c)$ — аксиома A14:

$$\varphi(c) \doteq \forall y \alpha(y, c) \rightarrow [t(c)/y] \alpha(y, c),$$

где $[t(c)/y]$ свободна для $\alpha(y, c)$. Тогда

$$\varphi(z) \doteq [z/c] \varphi(c) \doteq \forall y \alpha(y, z) \rightarrow [z/c][t(c)/y] \alpha(y, c).$$

Но

$$[z/c][t(c)/y] \alpha(y, c) \doteq [t(z)/y] \alpha(y, z)$$

¹Если $\varphi(x)$ — замкнутая, говорят, что x — ее *фиктивный параметр*.

²Напомним, что $\varphi(c)$ получается заменой x на c : $\varphi(c) \doteq [c/x] \varphi(x)$.

³Какие-то формулы $\alpha_i(c)$ могут и не содержать c . Тогда $\alpha_i(z) \doteq \alpha_i(c)$ не содержит z .

(это “2я техническая лемма”). Итак,

$$\varphi(z) \doteq \forall y \alpha(y, z) \rightarrow [t(z)/y] \alpha(y, z).$$

Подстановка по-прежнему $[t(z)/y]$ свободна для $\alpha(y, z)$: хотя в $t(z)$ добавилась переменная z , кванторов по ней в $\alpha(y, z)$ нет (потому что z не входит в $\varphi(c)$ по предположению). Значит, $\varphi(z)$ — тоже A14.

Аналогично поступаем с A15.

4. Если $\varphi(c)$ получается по МР из $\psi(c)$, $\psi(c) \rightarrow \varphi(c)$, то выводы этих формул короче. По предположению индукции, $T \vdash \psi(z)$, $\psi(z) \rightarrow \varphi(z)$. Тогда $T \vdash \varphi(z)$ по МР.

5. Пусть $\varphi(c)$ получается по Gen_y , из $\psi(c)$, т.е. $\varphi(c) \doteq \forall y \psi(c)$. По предположению индукции, $T \vdash \psi(z)$. Тогда по Gen_y , $T \vdash \forall y \psi(z) \doteq \varphi(z)$. (Здесь важно, что y, z различны, т.к. z не входит в $\varphi(c)$.)

Других случаев нет: $\varphi(c) \notin T$ по предположению леммы.

(II) $T \vdash \varphi(z)$ следует $T \vdash \forall z \varphi(z)$ по Gen_z . Но $\varphi(z) \doteq [z/x] \varphi(x)$, и значит, $\varphi() \doteq [x/z] \varphi(z)$. При этом подстановка $[x/z]$ свободна для $\varphi(z)$, потому что она на местах вхождений z возвращает свободные вхождения x . Получаем по A14:

$$\forall z \varphi(z) \rightarrow [x/z] \varphi(z) \doteq \forall z \varphi(z) \rightarrow \varphi(x).$$

Теперь по МР, $T \vdash \varphi(x)$, и по Gen_x , $T \vdash \forall x \varphi(x)$. ■

Определение 1 Константа c называется свидетелем для замкнутой формулы $\exists x \varphi(x)$ в теории T , если $T \vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$. T называется теорией Хенкина, если в T есть свидетели для всех замкнутых формул, начинающихся с $\exists$.

Лемма 9.2 Если теория T непротиворечива, $\exists x \varphi(x)$ — замкнутая формула (в той же сигнатуре), c — константа, которая не встречается в T , то теория $T \cup \{\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)\}$ непротиворечива.

Доказательство Рассуждаем от противного. Если $T \cup \{\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)\}$ непротиворечива, то $T \vdash \neg(\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c))$. Тогда $T \vdash \exists x \varphi(x)$, $\neg \varphi(c)$ (поскольку $\neg(A \rightarrow B) \vdash_{CL} A, \neg B$). По лемме 9.1, из $T \vdash \neg \varphi(c)$ следует $T \vdash \forall x \neg \varphi(x)$. В РС мы имеем $\vdash \forall x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \exists x \varphi(x)$ (см. лекцию 4). Отсюда по МР $T \vdash \neg \exists x \varphi(x)$. Следовательно, T противоречива. ■

Определение 2 Множества X, Y назовем почти равномошными, если они равномошны или же одно из них конечно, а другое счетно.

Определение 3 Мощность сигнатуры Ω (обозначается $|\Omega|$) — это мощность множества всех ее символов. X, Y назовем почти равномошными, если они равномошны или же одно из них конечно, а другое счетно.

Лемма 9.3 Множество символов сигнатуры Ω и множество замкнутых формул CFm_Ω почти равномошны.

Доказательство Из теории множеств известно, что для бесконечного X , $|X| = |X^2|$,⁴ а потому $|X| = |X^n|$ для всех конечных n .

⁴Для доказательства в общем случае нужна аксиома выбора.

Формулы - это слова (конечные последовательности), построенные из символов Ω , и еще счетного множества символов (переменных, связок, кванторов, запятых, скобок). Т.е. используется множество X , почти равномошное Ω . Таким образом,

$$|CFm_\Omega| \leq |Fm_\Omega| \leq |X \cup X^2 \cup X^3 \cup \dots| = |X| \cdot |\aleph_0| \leq |X^2| = |X|.$$

И ясно, что $|\Omega| \leq |Fm_\Omega|$: разным символам Ω можно поставить в соответствие разные замкнутые формулы. Например, произвольному предикатному символу P^n — формулу $\exists y P^n(y, \dots, y)$ (где y — фиксированная переменная), константе c — формулу $Q^m(c, \dots, c)$ (где Q^m — фиксированный предикатный символ), функциональному символу f^k — формулу $\exists y Q^m(f^k(y, \dots, y), y, \dots, y)$ (где Q^m — фиксированный предикатный символ, y — фиксированная переменная). ■

Лемма 9.4 (Лемма Хенкина) Пусть Γ — непротиворечивая теория в сигнатуре Ω . Тогда существует непротиворечивая теория Хенкина $\Gamma' \supset \Gamma$ в сигнатуре Ω' , почти равномошной Ω .

Доказательство Для каждой замкнутой формулы вида $\exists x \varphi(x)$ вводим новую константу c_φ . Пусть

$$\Gamma_1 := \Gamma \cup \{ \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c_\varphi) \mid \exists x \varphi(x) \in CFm_\Omega \}.$$

Утверждение Γ_1 непротиворечиво.

Действительно, иначе была бы противоречива ее конечная подтеория, которая содержится в теории вида

$$\Gamma \cup \{ \exists x_1 \varphi_1(x_1) \rightarrow \varphi_1(c_{\varphi_1}), \dots, \exists x_n \varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi_n(c_{\varphi_n}) \}.$$

Но последняя теория непротиворечива по лемме 9.1, примененной n раз. Утверждение доказано.

Теперь по индукции определим теории Γ_n : $\Gamma_0 := \Gamma$, $\Gamma_{n+1} := (\Gamma_n)_1$. Из доказанного утверждения следует их непротиворечивость (также по индукции).

Заметим, что сигнатура Γ_1 почти равномошна Ω : мы добавили констант столько же, сколько замкнутых формул вида $\exists x \varphi(x)$. Они образуют подмножество CFm_Ω , равномошное CFm_Ω , т.к. из любой замкнутой формулы $\varphi(x)$ (где x — фиктивный параметр) можно построить замкнутую формулу $\exists x \varphi(x)$. По индукции получаем, что сигнатура Γ_n (обозначим ее Ω_n) почти равномошна Ω .

Наконец, полагаем $\Gamma' := \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$. Эта теория непротиворечива: иначе противоречие выводится в ее конечной подтеории, которая содержится в каком-то Γ_n (это следует, из того, что Γ_n образуют возрастающую последовательность).

Γ' — теория Хенкина. Действительно, замкнутая формула $\exists x \varphi(x)$ в ее сигнатуре содержит конечное число новых констант, поэтому попадает в какую-то Ω_n . По построению, у нее есть свидетель в Γ_{n+1} , а потому и в Γ' .

Сигнатура Ω' теории Γ' получается как объединение всех Ω_n . Если Ω бесконечна, то они равноможны Ω , и

$$|\Omega| \leq |\Omega'| \leq |\Omega| \cdot \aleph_0 = |\Omega|.$$

Если Ω конечна, то все они счетны и их счетное объединение — тоже. Итак, Ω' почти равноможна Ω . ■

Теорема 9.5 Пусть T — непротиворечивая теория 1го порядка в сигнатуре Ω . Тогда T имеет модель, почти равноможную Ω .

Замечание В этой теореме речь идет о непротиворечивости в PC_Ω . Тогда говорят, что теория T без равенства. Символ равенства при этом может входить в сигнатуру, но стандартные аксиомы равенства не обязаны быть теоремами T .

Доказательство По лемме 9.4 расширим T до непротиворечивой теории Хенкина T' ; ее сигнатура Ω' почти равноможна Ω . Затем по лемме Линденбаума (аналогично 2.3) расширим T' до максимальной непротиворечивой теории T^+ в той же сигнатуре Ω' . Лемма 2.3 относится к исчислению высказываний, но доказательство ее без труда переносится на исчисление предикатов. Т.к. сигнатура T' не изменилась, а теория расширилась, все свидетели сохраняются. Итак, T^+ — теория Хенкина.

Далее для удобства обозначений полагаем $T = T^+$, $\Omega = \Omega'$. Построим модель M для этой теории.

Для каждого замкнутого терма t нашей сигнатуры заготовим копию $\underline{t}$, которая отличается от всех термов и формул.⁵ Положим

$$\underline{M} := \{\underline{t} \mid t \in CTm_\Omega\}.$$

Определим интерпретацию констант, функциональных и предикатных символов:

$$c_M := \underline{c}, \quad f_M(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n) := \underline{f(t_1, \dots, t_n)}, \text{ если } f \text{ — } n\text{-местный,}$$

$$P_M(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n) = 1 \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in T, \text{ если } P \text{ — } n\text{-местный.}$$

Утверждение 1 $|t|_M = \underline{t}$ для всех $t \in CTm_\Omega$.

Это доказывается индукцией по длине t . Базис ($t \doteq c$) содержится в определении.

Шаг индукции. Если утверждение $|t|_M = \underline{t}$ верно для $t \doteq t_1, \dots, t \doteq t_n$, то оно верно для $t \doteq f(t_1, \dots, t_n)$:

$$|f(t_1, \dots, t_n)|_M = f_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M) = f_M(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n) = \underline{f(t_1, \dots, t_n)}$$

по определению значения терма, предположению индукции и определению M .

Утверждение 2 $M \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T$ для всех $\varphi \in CFm_\Omega$.

Доказываем индукцией по числу логических связок и кванторов в φ .

⁵Это нужно из технических соображений. Потом окажется, что можно отождествить t и $\underline{t}$ (утверждение 1).

Базис. Пусть $\varphi \doteq P(t_1, \dots, t_n)$ — атомарная. Тогда

$$M \models \varphi \Leftrightarrow P_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M) = 1 \Leftrightarrow P_M(t_1, \dots, t_n) = 1 \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in T.$$

Это получается по определению значения формулы, предположению индукции и определению M .

Шаг индукции.

- Если $\varphi \doteq \neg\varphi_1$ или $\varphi \doteq (\varphi_1 \circ \varphi_2)$ для формул φ_1, φ_2 и $\circ \doteq \rightarrow, \vee$ или $\wedge$, то используем аналог леммы 2.4 (свойства максимальных теорий): принадлежность к T согласована с логическими связками.

Например, для $\varphi \doteq (\varphi_1 \vee \varphi_2)$:

$$M \models \varphi \Leftrightarrow M \models \varphi_1 \text{ или } M \models \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \in T \text{ или } \varphi_2 \in T \Leftrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2) \in T$$

по определению истинности, предположению индукции и лемме 2.4.

- Пусть теперь $\varphi \doteq \exists x\psi(x)$. Тогда по определению истинности

$$M \models \varphi \Leftrightarrow \text{существует терм } t \in CTm_\Omega \text{ такой, что } |\psi(t)|_M = 1.$$

Кроме того,

$$|\psi(t)|_M = |\psi(|t|_M)|_M = |\psi(t)|_M.$$

Первое равенство следует из утверждения 1, а второе — “техническая лемма” 8.1. Получаем:

$$M \models \varphi \Leftrightarrow \text{существует } t \in CTm_\Omega \text{ такой, что } M \models \psi(t) \Leftrightarrow$$

$$\text{существует } t \in CTm_\Omega \text{ такой, что } \psi(t) \in T$$

по предположению индукции для $\psi(t)$. Докажем, что

$$\text{существует } t \in CTm_\Omega \text{ такой, что } \psi(t) \in T \Leftrightarrow \exists x\psi(x) \in T.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\psi(t) \in T$. Заметим, что $T \vdash \psi(t) \rightarrow \exists x\psi(x)$ (аксиома PC), откуда $T \vdash \exists x\psi(x)$ по MP . Следовательно, $\exists x\psi(x) \in T$ — по свойству максимальных теорий (лемма 2.4).

($\Leftarrow$) Пусть $\exists x\psi(x) \in T$. — теория Хенкина, поэтому $\vdash \exists x\psi(x) \rightarrow \psi(c)$ для некоторой константы c . Тогда $T \vdash \psi(c)$ по MP и $\psi(c) \in T$ (по лемме 2.4). Т.е. можно взять $t \doteq c$.

- $\varphi \doteq \forall x\psi(x)$. Этот случай сводится к другим, если заметить, что $\vdash_{PC} \forall x\psi(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg\psi(x)$ (упражнение для слушателей).

Из утверждения 2 получаем, что $M \models T$. Мощность $|M|$ — это $|CTm_\Omega|$.

Теперь вспомним, что через Ω мы временно обозначили Ω' , в которой содержатся различные свидетели для всех замкнутых формул первоначальной Ω . Поэтому (для исходной Ω) $|CFm_\Omega| \leq |CTm_{\Omega'}|$. Также $|CTm_{\Omega'}| \leq |CFm_{\Omega'}|$, потому что можно из каждого терма t сделать формулу $P(t, \dots, t)$ (где P — фиксированный предикатный символ). Но Ω' почти равномошна Ω , поэтому для бесконечной Ω $|\Omega| = |\Omega'| = |CFm_\Omega| = |CFm_{\Omega'}|$ (лемма 9.3). И тогда $|CTm_{\Omega'}| = |\Omega|$.

Если же Ω конечна, то $|\Omega'| = |CFm_\Omega| = |CFm_{\Omega'}| = \aleph_0$. И тогда $|CTm_{\Omega'}| = \aleph_0$. ■

Теорема 9.6 (Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов без равенства).

(1) Пусть T — теория 1го порядка в сигнатуре Ω , α — замкнутая формула в той же сигнатуре. Если $T \models \alpha$, то $T \vdash_{PC_\Omega} \alpha$.

(2) Если формула $\alpha \in Ft_\Omega$ общезначима, то она выводима в PC_Ω .

Доказательство (1) Если $T \not\models \alpha$, то $T \cup \{\neg\alpha\}$ непротиворечива. По теореме 9.5 она выполнима. Тогда $T \not\models \alpha$.

(2) Общезначимость α равносильна общезначимости универсального замыкания $\bar{\forall}\alpha$. Выводимость α в РС также равносильна выводимости $\bar{\forall}\alpha$. Из общезначимости $\bar{\forall}\alpha$ следует ее выводимость — это теорема 9.5 для $T = \emptyset$. ■

Теорема 9.7 Пусть T — непротиворечивая теория 1го порядка с равенством в сигнатуре Ω . Тогда T имеет нормальную модель мощности не более $|\Omega|$, если Ω бесконечна и не более $\aleph_0$, если Ω конечна.

Доказательство Если T непротиворечива в $PC_\Omega^=$, то $T \cup Eq_\Omega$ (где Eq_Ω — стандартная теория равенства в Ω) непротиворечива в PC_Ω . По теореме 9.5 $T \cup Eq_\Omega$ имеет модель M мощности $|\Omega|$ (или счетную, если Ω конечна). По нормализации (теорема 7.1) строим нормальную модель $\widetilde{M} \equiv M$. Тогда $\widetilde{M} \models T$. При этом $|\widetilde{M}| \leq |M|$, т.к. она получается факторизацией M .⁶ ■

Теорема 9.8 (Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов с равенством).

(1) Пусть T — теория 1го порядка с равенством в сигнатуре Ω , α — замкнутая формула в той же сигнатуре. Если $T \models \alpha$ на нормальных моделях, то $T \vdash_{PC_\Omega^=} \alpha$.

(2) Если формула α в сигнатуре с равенством Ω общезначима на нормальных моделях, то она выводима в $PC_\Omega^=$.

Доказательство Получается из предыдущей теоремы аналогично 9.6. ■

⁶В этом месте нужна аксиома выбора.