Задачи к коллоквиуму по матанализу за второй семестр
(16, 19.06.2018)

1. Ряды с комплексными членами. Связь сходимости и абсолютной сходимости
2. Теорема сравнения. Признаки сходимости Даламбера и Коши
3. Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций
4. Признак Вейерштрасса
5. Радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара
6. Ряды Тейлора функций синус, косинус и $(1+x)^a$
7. Определение производной функции комплексного переменного. Производные многочленов и рациональных функций
8. *Голоморфность аналитических функций
9. *Свойства аналитических функций (раздел 4 лекции 3)
10. *Свойства голоморфных функций (раздел 3 лекции 7)
11. Определение интеграла Римана и свойства интегральных сумм
12. Существование интеграла Римана от непрерывной функции на отрезке
13. Производная от интеграла с переменным верхним пределом
14. Формула Ньютона–Лейбница
15. Интегральные теоремы о среднем
16. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям
17. Интегральная форма и форма Коши остаточного члена в формуле Тейлора
18. Линейность и аддитивность интеграла
19. Доказательство формулы $(1+\frac{z}{n})^n \to e^z$, $z \in \mathbb{C}$ (аналогичную формулу для $z \in \mathbb{R}$ считать доказанной)
20. Формула Эйлера как предельный случай формулы Муавра
21. Комплексный логарифм: определение, формула $e^{\ln z} = z$, производная комплексного логарифма
22. Лемма о рациональных функциях без полюсов
23. Разложение рациональной дроби на простейшие (случай простых нулей знаменателя)
24. Формулировка общей теоремы о разложении рациональной дроби на простейшие и интегрирование рациональной дроби в случае вещественных и комплексных корней знаменателя.
25. Связь логарифма и арктангенса
26. Дифференциал функции многих переменных, производная функции вдоль вектора и их связь
27. Достаточное условие непрерывностью функции нескольких переменных в терминах частных производных
28. Достаточное условие дифференцируемости и выражение дифференциала через частные производные

29. Норма линейного функционала. Градиент функции и норма ее дифференциала

30. Теорема о конечном приращении

31. Необходимое условие наличия экстремума

32. Старшие производные: определение. Равенство смешанных производных

33. Мультииндексные обозначения. Формула Тейлора

34. Малость остатка в формуле Тейлора

35. Гессиан. Достаточное условие наличия экстремума

36. Дифференциал отображения (определение). Норма линейного оператора

37. Многомерная теорема о конечном приращении

38. Теорема о дифференцировании сложной функции (композиции отображений)

39. Пространства l_2, l_∞, C. Норма и метрика в них. Их полнота

40. *Полнота l_2 и l_∞.

41. Почленное интегрирование и дифференцирование.

42. Пространство C^N и его полнота.

43. Принцип сжимающих отображений. Пикаровские приближения.

44. Теорема об обратном отображении: формулировка и сведение к задаче о неподвижной точке.

45. C^N-гладкость обратного отображения.

46. Теорема о неявной функции

47. Нормальные формы функций, отображений и подмногообразий в окрестности некритической точки.

48. Два определения касательного пространства к подмногообразию евклидова пространства и их эквивалентность

49. Необходимое условие наличия условного экстремума функции на гиперповерхности

50. Нахождение условного экстремума на гиперповерхности. Множители Лагранжа

51. Необходимое условие наличия условного экстремума функции на поверхности произвольной размерности

52. Нахождение условного экстремума на поверхности произвольной размерности. Множители Лагранжа

53. Достаточное условие условного экстремума

54. Аналитические функции многих переменных

55. Лемма Морса для аналитической функции двух переменных

56. *Лемма Морса для аналитической функции многих переменных

57. Перестройка топологии множества уровня функции в окрестности невырожденой критической точки функции трех переменных (с рисунком)

58. Определение многомерного интеграла Римана

59. Свойства интегральных сумм

60. Множества меры 0 и их свойства. Критерий Лебега

61. Теорема Дарбу

62. Интеграл Римана как линейный функционал.

63. Интеграл по множеству. Аддитивность.

64. Теорема Фубини для непрерывных функций и для функций, интегрируемых по Риману

65. Формула замены переменной

На коллоквиуме отвечающий получит три теоретических вопроса из приведенного выше списка и одну задачу из списка ниже. При ответе на теоретический вопрос нужно без подготовки сформулировать соответствующие теоремы и все необходимые определения. Для решение задачи дается 20 мин студентам-«математикам» и 30 мин студентам Совбака. Определения, не упомянутые в программе явно, нужно формулировать там, где они впервые (по нумерации вопросов в списке) необходимы.

Задачи к коллоквиуму по матанализу за второй семестр
(16, 19.06.2018)

Задача 1.2. Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы преобразование $z \to a\bar{z} + b$ было осевой симметрией.

Задача 1.3. Голоморфны ли функции z, $\bar{z}$, $|z|^2$, z^2?

Задача 1.4. Пусть $|a| = 1$. Докажите, что функция $\arg(z + a\bar{z})$ принимает лишь два значения. Какие это значения и при каких z принимается каждое из них?

Задача 1.7. Докажите, что если ряд с положительными монотонно убывающими членами a_n сходится, то $na_n \to 0$.

Задача 1.10. Сходятся ли ряды:
а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, б*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}$, в*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{2^{n^2}}$, г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$,
д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$, е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, ж) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Задача 1.12. Сходятся ли равномерно на интервале $(0, \infty)$ функциональные последовательности (f_n), $n \in \mathbb{N}$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, где:
а) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$, б) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n-1}$, в) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n^2}$.

Задача 1.14. Может ли последовательность разрывных функций равномерно сходиться к непрерывной функции?

Задача 1.15. Найдите радиусы сходимости для следующих степенных рядов:
а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$, б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, г) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$, д) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n + 3^n} x^n$.

Задача 1.18. Докажите, что функция $f(x) = 2^{-1/x^2}$ бесконечно гладкая на всей прямой. Найдите ряд Тейлора в нуле этой функции.

Задача 2.2. Докажите, что первообразная от периодической функции сама периодична тогда и только тогда, когда интеграл от исходной функции по периоду равен нулю.

Задача 2.4. Интегрируема ли по Риману функция Дирихле?

Задача 2.9. Вычислите следующие неопределённые интегралы:
а) $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$, б) $\int \dfrac{dx}{1-e^x}$, в) $\int \operatorname{tg} x\, dx$, г) $\int \operatorname{th} x\, dx$,
н) $\int x \cos x\, dx$, о) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$, п) $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\, dx$.

Задача 3.1. а) Вычислите $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$.
б) Вычислите $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln^{\circ 2} x)\ldots(\ln^{\circ n} x)}$, где $f^{\circ k}$ — результат k-кратного применения f.

Задача 3.3. При каких α сходятся следующие интегралы: $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\, dx$; $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha\, dx$; $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha\, dx$?

Задача 3.5. Исследуйте на сходимость:
б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}\, dx$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$; в) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2 + c|x|}\, dx$, $\varepsilon > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Задача 3.6. Определим *гамма-функцию* при $x > 0$ формулой $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dx$.
Докажите, что Γ-функция определена (интеграл сходится) при $x > 0$.
Докажите, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Вычислите значения $\Gamma(n)$ для натуральных n.
К чему стремится $\Gamma(x)$ при $x \to 0$ и при $x \to \infty$?

Задача 3.8. При каких значениях параметров $\alpha, \beta > 0$ сходятся следующие ряды (суммирование начинается с того n, с которого все члены ряда становятся определены):
а) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; б) $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}$; в) $\sum \frac{1}{(n-a)^\alpha (n-b)^\beta}$; г) $\sum \frac{1}{n^\alpha + n^\beta}$; д) $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

Задача 3.11. Кривая задана в полярных координатах: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, где $r, \varphi \in C^1[a, b]$ Найдите формулу для её длины, считая формулу для длины гладкой кривой в евклидовых координатах известной.

Задача 3.12. Найдите длины кривых, заданных параметрически. Здесь (x, y) — евклидовы координаты, а (r, φ) — полярные.
а) $x(t) = t - \sin(t)$, $y(t) = 1 - \cos(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (циклоида);
г) $r = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (виток архимедовой спирали);
д) $r = e^{-\varphi}$, $\varphi \in [0, \infty)$ (логарифмическая спираль).

Задача 4.1. Исследуйте непрерывность следующих функций на плоскости:
а) r (полярный радиус); б) φ (полярный угол);
в) $\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$; г) $\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$; д) $\frac{x+y}{x-y}$; е) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

Задача 4.2. Нарисуйте графики и линии уровня функций:
а) $x^2 + y^2$; б) $x^2 - y^2$; в) xy; ж) $x^2 + y^3 - 3y$; и) $\frac{x+y}{x-y}$; к) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

Задача 4.5. Найдите частные производные и исследуйте дифференцируемость следующих функций:
а) r (полярный радиус); б) φ (полярный угол); в) $\sin(2 \arg(x + iy))$; г) $\frac{x+y}{x-y}$; д) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

Задача 4.7. Найдите критические точки следующих функций, исследуйте их тип и нарисуйте линии уровня в окрестности критических точек:
а) $y^2 + x^3 - 3x$; б) $\sin(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)$; в) $y^2 + \operatorname{ch}(x)$; г) $y^2 + \cos(x)$.

Задача 5.4. Докажите, что невырожденные критические точки дважды гладкой функции изолированы.

Задача 5.5. Найдите невырожденные критические точки, определите их тип и нарисуйте линии уровня вблизи критических точек для функций:
a) $\sin(x^2 \pm y^2)$; b) $\cos(x^2 \pm y^2 + 2x)$; c) $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$;
d) $\exp(x^2 - y)(5 - 2x + y)$.

Задача 5.6. Разложите в ряд Тейлора функции:
a) $\sin(x) + \cos(y)$; b) $\sin(x)\cos(y)$; c) $\sin(xy)$; d) $\exp(x + y)$.

Задача 5.7. Найдите все частные производные порядка 2018 функции $\exp(x^2 + y^2)$ в точке $(0, 0)$.

Задача 5.8. Вычислите производную $D^{20,18} f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ для функции:
a) $f(x, y) = \exp(x^7 + y^7)$; b) $f(x, y) = \exp(x^{20} + y^{18})$; c) $f(x, y) = \sin(x + y)$.

Задача 5.9. Вычислите дифференциалы и якобианы в точке $x = (x_1, x_2)$ для следующих отображений:
a) $x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; b) $x \mapsto (x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2)$; c) $x \mapsto x + a(\sin(x_1 + x_2), \sin(x_1 - x_2))$.

Задача 5.10. Рассмотрим пространство $M \cong \mathbb{R}^{n^2}$, состоящее из квадратных матриц $n \times n$ с вещественными коэффициентами. Вычислите дифференциал отображения $M \to M$, переводящего матрицу $m \in M$ в m^2 а) в единичной матрице.

Задача 5.12. а) Докажите, что

$$\rho(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

является метрикой в пространстве $C[0,1]$.
b) Полно ли пространство $C[0,1]$ в этой метрике?

Задача 5.13. Является ли метрикой на пространстве многочленов второй степени следующая функция ρ? Полна ли она?
а) $\rho(f,g) = \max_{x\in\{1,2\}} |f(x) - g(x)|$? b) $\rho(f,g) = \max_{x\in\{1,2,3\}} |f(x) - g(x)|$?

Задача 6.1. Докажите, что следующие отображения непрерывны:
(а) определённое интегрирование $C[a,b] \to \mathbb{R}$, переводящее f в $\int_a^b f(x)dx$;
(б) неопределённое интегрирование $C[a,b] \to C_[a,b]$, переводящее f в $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

Задача 6.3. Рассмотрим пространство n-гладких функций на отрезке $[a,b]$ (все производные, включая n-ю, определены и непрерывны).
(а) Какие из следующих выражений определяют метрику на этом пространстве:

$$d_1(f,g) = \max_{0\le k\le n} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)} - g^{(k)}|, \quad d_2(f,g) = \min_{0\le k\le n} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)} - g^{(k)}|, \quad d_3(f,g) = \sum_{k=1}^{n} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)} - g^{(k)}|.$$

(б) Докажите эквивалентность соответствующих метрик.

Задача 6.6. Непрерывны ли отображения:
(а) естественного вложения $C^k[a,b]$ в $C^n[a,b]$, $n < k$;
(б) дифференцирования $C^k[a,b]$ в $C^{k-1}[a,b]$;
(в) неопределённого интегрирования $C^k[a,b]$ в $C^{k+1}[a,b]$.

Задача 6.7. Определите, для каких промежутков теорема о неявной функции позволяет дать решение $y = y(x)$ уравнения $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*астроида*). Найдите для этих решений dy/dx, d^2y/dx^2. (Ответ может содержать и x, и y.)

Задача 6.10. Рассмотрим параметрически заданную кривую
(а) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, (б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, (в) $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
Найдите, при каких t_0 в окрестности точки $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ теорема о неявной функции позволяет локально записать эту кривую в виде $y = \varphi(x)$. Разложите в ряд Тейлора до $o((x - x_0)^2)$ соответствующую функцию φ.

Задача 6.12. Для функции $z = z(x,y)$ найти частные производные первого и второго порядка, если
(а) $z^3 - 3xyz = a^3$, (б) $x + y + z = e^z$.

Задача 6.14. Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Найдите матрицу частных производных $\begin{pmatrix} D_r x & D_r y \\ D_\varphi x & D_\varphi y \end{pmatrix}$. Проверьте, что при $r \neq 0$ теорема о неявной функции позволяет локально выразить x, y через r, φ.
Найдите частные производные $\begin{pmatrix} D_x r & D_x \varphi \\ D_x \varphi & D_y \varphi \end{pmatrix}$.

Задача 6.16. В окрестности каких точек обратимы следующие отображения? Вычислите дифференциал обратного отображения.
(а) $F(x,y) = (x+y, xy)$; (б) $F(x,y) = (x+y, x^2+y^2)$; (в) $F(x,y) = (xy, x^y)$, $x > 0$.

Задача 7.8. а) Пусть функция имеет морсовскую критическую точку с одним отрицательным квадратом у второго дифференциала (гессиана). Пусть Γ — гладкая гиперповерхность, проходящая через эту точку. Может ли эта точка быть условным минимумом?
б) Тот же вопрос, если число отрицательных квадратов гессиана больше 1.

Задача 7.11. Найдите и исследуйте критические точки на окружности $\{x^2 + y^2 = 1\}$ и сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ для следующих функций:
а) xy $(k = 2, 3)$; б) $5x^2 + 6xy + 5y^2$ $(k = 2, 3)$.

Задача 7.12. а) Как связаны критические точки ограничения квадратичной формы на единичную сферу в евклидовом пространстве с собственными векторами этой формы?
б) При каком условии на квадратичную форму эти критические точки будут морсовскими?

Задача 7.14.* Пусть Γ — некритическая линия уровня функции g, и $a \in \Gamma$ — точка, критическая для ограничения $f|_\Gamma$, но не для f. Доказать, что линия уровня функции f, содержащая a, касается Γ в точке a.

Задача 7.15. Найдите точки условных экстремумов функции u при указанных ограничениях:
а) $u = x^2 + y^2$ при $x/a + y/b = 1$ $(a, b > 0$ — заданные параметры);
б) $u = x^k y^l z^m$ при $x + y + z = a$, $x, y, z \geq 0$ $(a, k, l, m > 0$ — заданные параметры);
в) $u = xyz$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$;
г) $u = xy + yz$ при $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$, $x, y, z > 0$.

Задача 7.16. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $u = x + y + z$ в области, определённой неравенствами $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Задача 8.2. Пусть $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Найдите $\iint_{[a,a']\times[b,b']} F''_{xy}(x, y)\, dxdy$.

Задача 8.3. Вычислите площадь: а) круга радиуса R, б) эллипса с полуосями a и b,
в*) области, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс.

Задача 8.4. Вычислите интеграл от функции $f(x, y) = |xy|$ по единичному кругу.

Задача 8.5. Сведите двойной интеграл неизвестной непрерывной функции f к однократному:
а) $\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x^2 + y^2)\, dxdy$, в) $\iint_{x^2+y^2\leq x} f(y/x)\, dxdy$.

Задача 8.8. Найдите координаты центра масс полукруга $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$. Напомним, что координаты x_0, y_0 центра масс — это средние значения по области от функций x и y соответственно.

Задача 8.9. Для сферической системы координат $x = r \cos\varphi \cos\psi$, $y = r \sin\varphi \cos\psi$, $z = r \sin\psi$ найдите якобиан замены евклидовых координат на сферические.

Задача 8.10.* Найдите объём а) шара радиуса R, б) тора, полученного вращением вокруг оси ℓ окружности радиуса a, которая лежит в плоскости, содержащей ℓ, причём центр окружности удалён от оси на расстояние b.

Задача 8.12.* а) Найдите объём подмножества $\mathbb{R}^n$, заданного неравенствами $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
б) Найдите объём n-мерного правильного симплекса с ребром, равным 1.

Задача 8.13. Найдите объём тела, высекаемого в октанте $x, y, z \geq 0$ поверхностью $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$.