

## Вычислимость (семинар 7)

1. Разрешимость множества простых чисел-близнецов.
2. Разрешимость множества четных чисел, которые представимы в виде суммы двух простых (гипотеза Гольдбаха — Эйлера утверждает, что это множество состоит из всех четных чисел  $> 2$ ).
3. Перечислимость множества четных чисел, которые представимы в виде разности двух простых (недоказанная гипотеза утверждает, что это множество состоит из всех четных чисел).
4. Пусть  $A$  — разрешимое множество натуральных чисел,  $f, g$  — вычислимые тотальные функции  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Рассмотрим функцию  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такую что  $h(x) = f(x)$  при  $x \in A$ ;  $h(x) = g(x)$  при  $x \notin A$ . Докажите, что  $h$  вычислима.
5. (а) Если  $A, B$  — перечислимые множества натуральных чисел, то множество  $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$  перечислимо.  
(б) Что можно сказать про множество  $A+B$ , если  $A$  и  $B$  разрешимы?
6. Пусть  $A$  — разрешимое множество слов,  $B \subset A$ , причем  $B$  и  $(A \setminus B)$  перечислимы. Докажите, что  $B$  разрешимо.
7. Всякое непустое разрешимое множество — образ вычислимой тотальной (нестрого) монотонной функции.
8. Множество значений вычислимой строго возрастающей последовательности натуральных чисел разрешимо.
9. Если множество  $A \subset \mathbb{N}^2$  разрешимо, и множество  $\text{pr}_2 A$  конечно, то множество  $\text{pr}_1 A$  разрешимо.
10. Докажите, что множество всех чисел Фибоначчи разрешимо.
11. Пусть  $f$  — вычислимая тотальная функция  $\mathbb{N}_2 \rightarrow \mathbb{N}$ . Рассмотрим тотальную функцию  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такую что для любого  $x$ ,  $g(x+1) = f(x, g(x))$ . Докажите, что  $g$  вычислима.
12. Докажите, что следующие теории в сигнатуре  $\{=\}$  разрешимы:
  - а) теория бесконечных множеств
  - б) теория множеств мощности  $> 5$ .
  - в) теория конечных множеств
13. Докажите, что для любой теории  $T$  и формулы  $\varphi$  в ее сигнатуре:  
 $T \vdash \varphi$  тогда и только тогда, когда  $\varphi$  выводится во всех полных расширениях  $\Gamma$ .
14. Докажите, что если теория первого порядка  $T$  в конечной сигнатуре имеет конечное число полных расширений и все они перечислимы, то  $T$  разрешима.
15. Найдите все полные расширения теории плотных линейно упорядоченных множеств.
16. Докажите, что теория плотных линейно упорядоченных множеств разрешима.