Логика и алгоритмы весна 2018.
Листок N 2. Срок сдачи 28 мая.

На оценку 5 надо решить все обязательные задачи. За решение задачи 11 дается 2 балла, остальные задачи оцениваются по 1 баллу. Можно набрать не более 10 баллов.

В этом листке все сигнатуры и теории с равенством, все модели нормальны.

Обязательные задачи

1. Докажите, что частично упорядоченные множества $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}+\mathbb{N}$ как модели сигнатуры $\{<,=\}$ не элементарно эквивалентны.

2. Докажите, что в модели $(\mathbb{N},<)$ все конечные подмножества определимы.

3. Найдите все множества, определимые в модели $(\mathbb{Q},+_{\mathbb{Q}},0_{\mathbb{Q}},=_{\mathbb{Q}})$.

4. Докажите, что теория полей нулевой характеристики в сигнатуре $\{+,\cdot,1,0,=\}$ не конечно аксиоматизируема.

   (Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если существует конечная теория с тем же множеством теорем.)

5. Докажите, что $Th(\mathbb{Z},<_{\mathbb{Z}},=_{\mathbb{Z}})$ не является счетно категоричной. (Указание: добавьте дополнительные константы и аксиомы для них).

Дополнительные задачи

6. В сигнатуре $(R,=)$, где R — 2-местный предикатный символ, рассмотрим теорию бесконечных множеств с отношением эквивалентности, у которого все классы 2- элементны.

   (a) Запишите аксиомы этой теории.

   (b) Докажите ее полноту.

   (c) Докажите, что эта теория не конечно аксиоматизируема.

7. Даны две теории T и S в сигнатуре L со следующими свойствами:

   - теория $T\cup S$ противоречива;
   - всякая модель сигнатуры L является либо моделью T, либо моделью S.

   Докажите, что обе теории T и S конечно аксиоматизируемы.

8. Докажите, что не существует теории в сигнатуре $\{\cdot,=\}$, моделями которой являются в точности все циклические группы.

9. Докажите, что теория $Th(\mathbb{Q})$ в сигнатуре $\{+,\cdot,1,0,=\}$ не является счетно категоричной.

10. Пусть A,A',B,B' — линейно упорядоченные множества (в сигнатуре $\{<,=\}$). Докажите, что если $A\equiv A'$ и $B\equiv B'$, то $A+B\equiv A'+B'$.

11. Докажите, что $Th(\mathbb{Q}+\mathbb{Z})$ в сигнатуре $\{<,=\}$ не категорична ни в счетной, ни в континуальной мощности.