

### Листок 3 (срок сдачи 15.06.18)

На оценку 5 надо решить все обязательные задачи.

За решение задач 12, 13 дается по 2 балла, остальные задачи оцениваются по 1 баллу. Можно набрать не более 10 баллов.

В задачах 2-13 можно использовать тезис Черча.

#### Обязательные задачи

1. (письменная) Постройте машину Тьюринга, вычисляющую остаток от деления натурального числа в унарной записи на 3. Сначала опишите порядок действий этой машины на русском языке.
2. (a) Докажите, что декартово произведение двух перечислимых подмножеств  $\mathbb{N}$  перечислимо.  
(b) Докажите, что декартово произведение двух разрешимых подмножеств  $\mathbb{N}$  разрешимо.
3. (a) Докажите, что график любой вычислимой функции  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  является перечислимым подмножеством  $\mathbb{N}^2$ .  
(b) Докажите, что если график функции  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  является перечислимым подмножеством  $\mathbb{N}^2$ , то  $f$  вычислима.
4. Разрешимо ли множество номеров вычислимых частичных функций из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ , принимающих только конечное число значений?
5. Пусть  $A \subset \mathbb{N}$  — бесконечное перечислимое множество. Докажите, что существует вычислимая инъекция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такая что  $\text{rng } f = A$ .

#### Дополнительные задачи

6. Пусть  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — вычислимая тотальная строго возрастающая функция,  $A$  — разрешимое множество натуральных чисел. Докажите, что множество  $f[A]$  разрешимо.
7. Докажите, что график любой вычислимой тотальной функции  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  является разрешимым подмножеством  $\mathbb{N}^2$ .
8. Докажите, что если  $A, B \subset \mathbb{N}$  — бесконечные разрешимые множества с бесконечными дополнениями, то существует вычислимая биекция  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , переводящая  $A$  в  $B$ .
9. Постройте разрешимое множество  $B \subset \mathbb{N}^2$ , для которого проекция  $\text{pr}_1 B = \{x \mid \exists y (x, y) \in B\}$  — неразрешимое множество.
10. Докажите, что если теория первого порядка в конечной сигнатуре не имеет бесконечных моделей, то она разрешима.
11. Докажите, что множество номеров пустой функции из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$  не перечислимо.
12. Докажите, что множество  $\{n \mid \varphi_n \text{ тотальна}\}$  не перечислимо.
13. Существует ли неперечислимое множество  $A \subset \mathbb{N}$ , дополнение которого также не перечислимо?