

Вариационные задачи

Обсудим несколько вариационных задач. Не все из них чисто механические, но на этих примерах наглядно демонстрируются свойства вариационного формализма.

1) Задача о геодезических

Рассмотрим движение свободной частицы на поверхности, задаваемой идеальными связями:

$$\underline{r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad i=1 \dots N} \quad (1)$$

Здесь $\{r_i\}_{i=1}^N$ — ^{декартовы} координаты в пространстве \mathbb{R}^N , в которое вложена n -мерная поверхность связей.

Координаты на поверхности — $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$.

При редукции на поверхность связей (подстановке (1)) кинетическая энергия свободной частицы приобретает вид (считаем $m=1$):

$$\underline{T = \sum_i \frac{1}{2} \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad \text{где} \quad (2)}$$

$$\underline{g_{\alpha\beta}(q) := \sum_{i=1}^N \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}} \quad \text{— индуциро-}$$

ванная метрика на поверхности. Это симмет-

рический тензор 2 ранга, положительно опре- (2)
деленный,

Уравнение Эйлера-Лагранжа для частицы с лагранжианом $L = T$ можно привести к виду (проверьте):

$$L_{\alpha} := g_{\alpha\beta} \ddot{q}_{\beta} + \Gamma_{\alpha, \beta\gamma} \dot{q}_{\beta} \dot{q}_{\gamma} = 0, \quad (3)$$

где

$$\Gamma_{\alpha, \beta\gamma}(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q_{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q_{\alpha}} \right) \quad (4)$$

Уравнение (3) называется уравнением геодезических, а участвующий в нем объект $\Gamma_{\alpha, \beta\gamma}$ — символом Кристоффеля.

Геодезическими называются кривые минимальной длины, соединяющие две точки поверхности. Стоит проверить, что траектории движения свободной частицы на поверхности действительно являются геодезическими.

Функционал длины кривой на поверхности с метрикой $g_{\alpha\beta}(q)$ имеет вид

$$l[q_{\alpha}(t)] = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta}(q) dq_{\alpha} dq_{\beta}} = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}} dt$$

то есть $\mathcal{L}[q_\alpha(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T} dt$, и он (3)
 отличается от действия свободной частицы $S[q_\alpha(t)] = \int_{t_1}^{t_2} T dt$

Но экстремаль $S[q_\alpha(t)]$ является экстремалью $\mathcal{L}[q_\alpha(t)]$.

Проверим это в более общем виде: докажем, что

экстремали $S[q_\alpha(t)]$ являются экстремальми и
 где $S_f[q_\alpha(t)] = \int_{t_1}^{t_2} f(T) dt$. Уравнение Э.-Л.

где S_f имеют вид:

$$L_{f,\alpha} := \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f(T)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial f(T)}{\partial q_\alpha} = f'(T) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) +$$

$$+ \frac{d f'(T)}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = f'(T) L_\alpha + \frac{d f'(T)}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

Здесь L_α — уравнение Э.-Л. действия свободной
 частицы $S[q_\alpha(t)]$. Мы получили $L_{f,\alpha} = \frac{L_\alpha}{dt} f'' \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$,

а хотим убедиться $L_{f,\alpha} \stackrel{L_\alpha}{=} 0$. Однако у свободной
 частицы $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, а значит ее энергия $E = T$
 сохраняется, то есть $\frac{dT}{dt} \stackrel{L_\alpha}{=} 0$ (это можно прове-

рить и вычислив "в лоб": $\frac{dT}{dt} = L_\alpha \dot{q}^\alpha$). Итак,

доказано $L_{f,\alpha} \stackrel{L_\alpha}{=} 0$,

и это верно и где функционал динич кривой
 $f(T) = \sqrt{2T}$.

Обратное утверждение, кстати, не верно: не (4)
 всякая экстремаль функционала длины $\ell[q_\alpha(t)]$
 является экстремалью действия свободной частицы $S[q_\alpha(t)]$
 Дело не в том, что существуют геодезические, по
 которым не может двигаться свободная частица, их нет.
 Дело в том, что уравнения экстремалей функцио-
 нала $\ell[q_\alpha(t)]$ формально имеют бесконечно много
 решений, отвечающих различным параметризациям
 одной и той же кривой (т. наз., репараметризационная
инвариантность задачи). Траектория же движения сво-
 бодной частицы допускает единственную параметриза-
 цию параметром времени t .

(2) Вариационная задача со старшими производными.

Будем искать экстремаль для функционала

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) dt \quad (5)$$

Дифференциал этого функционала имеет вид (посчитайте):

$$\delta S[\delta q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q dt +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \Big|_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \ddot{q} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Таким образом, экстремалами функционала (5) являются решениями дигура 4-го порядка

(5)

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial q} \right) L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0 \quad (6)$$

с четырьмя граничными условиями (по два на каждом конце), выбор которых зависит от пространства траекторий на которых ищется экстремаль

а) в начале и в конце траектории фиксируются координата и скорости частицы:

$$q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2, \dot{q}(t_1) = \dot{q}_1, \dot{q}(t_2) = \dot{q}_2.$$

Тогда $\delta q|_{t_{1,2}} = \delta \dot{q}|_{t_{1,2}} = 0$ и последние слагаемые

в δS автоматически закруляются

б) мы разрешаем частице иметь произвольную скорость на каком-то конце t_i ($i=1,2$):

$$\delta \dot{q}(t_i) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \Big|_{t_i} = 0$$

Это условие замещает собой условие $\dot{q}(t_i) = \dot{q}_i$

в) мы разрешаем частице иметь произвольную координату на конце t_i ($i=1,2$):

$$\delta q(t_i) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \Big|_{t_i} = 0$$

Это взамен условия $q(t_i) = q_i$.

2A

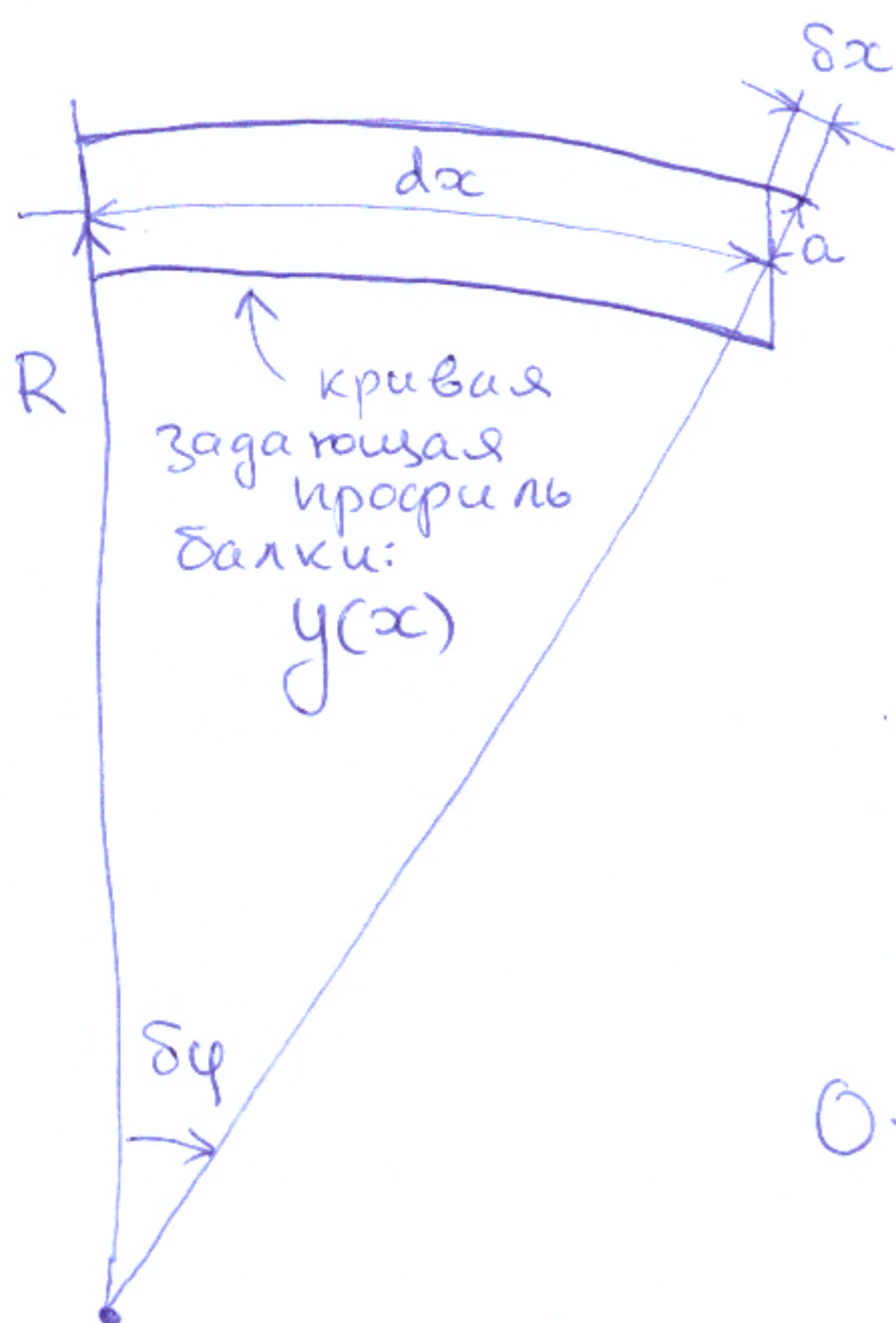
Задача о прогибе балки

6

Это задача о поиске экстремума функционала со старшими производными, причем, с различными граничными условиями.

Рассмотрим балку в поле тяжести. Изначально она была горизонтальна, но под действием тяжести прогибается вниз (незначительно), причем силы упругой деформации балки компенсируют действие сил тяжести. Это задача статики. Считается, что балка принимает такую форму, что ее потенциальная энергия (сумма энергий сил тяжести и сил упругости) минимальна. Возьмем потенциальную энергию упругой деформации

куска балки длиной dx (см. Рис.).



δx - деформация слоя балки, находящегося на расстоянии a от ее центра, при изгибе на угол $\delta\varphi$:

$$\delta x = a \delta\varphi$$

R - радиус кривизны балки

$$dx = R \delta\varphi$$

Относительная деформация слоя балки

$$\Delta = \frac{\delta x}{dx} = \frac{a}{R} \sim R^{-1}$$

Энергия упругой деформации слоя:

$$U_{упр} = \frac{\kappa \Delta^2}{2} \sim R^{-2}$$

Из анализа вспоминаем формулу кривизны
кривой $y(x)$:

(7)

$$R^{-1} = \frac{y''}{(1+y')^{3/2}} \cong y''(x) - \text{считаем,}$$

это деформация невелика — y, y', y'' — малы, и удерживаем в формуле для R^{-1} первый порядок малости.

Делаем вывод, что запасаемая упругая энергия куска
балки длины dx

$$\delta U_{\text{упр}} \cong \frac{\alpha}{2} (y''(x))^2 dx$$

α — коэффициент, зависящий от материала и толщины балки.

Энергия этого же куска в поле тяжести:

$$\delta U_{\text{тяж}} \cong \rho g y(x) dx$$

ρ — линейная плотность балки.

Функционал потенциальной энергии балки
имеет вид:

$$U[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\alpha}{2} y''^2 + \rho g y \right) dx$$

С точностью до переобозначений: $t \mapsto x, q \mapsto y$
это функционал (5), и его экстремаль является
решением диффр. уравнения (6), которое в
данном случае принимает вид:

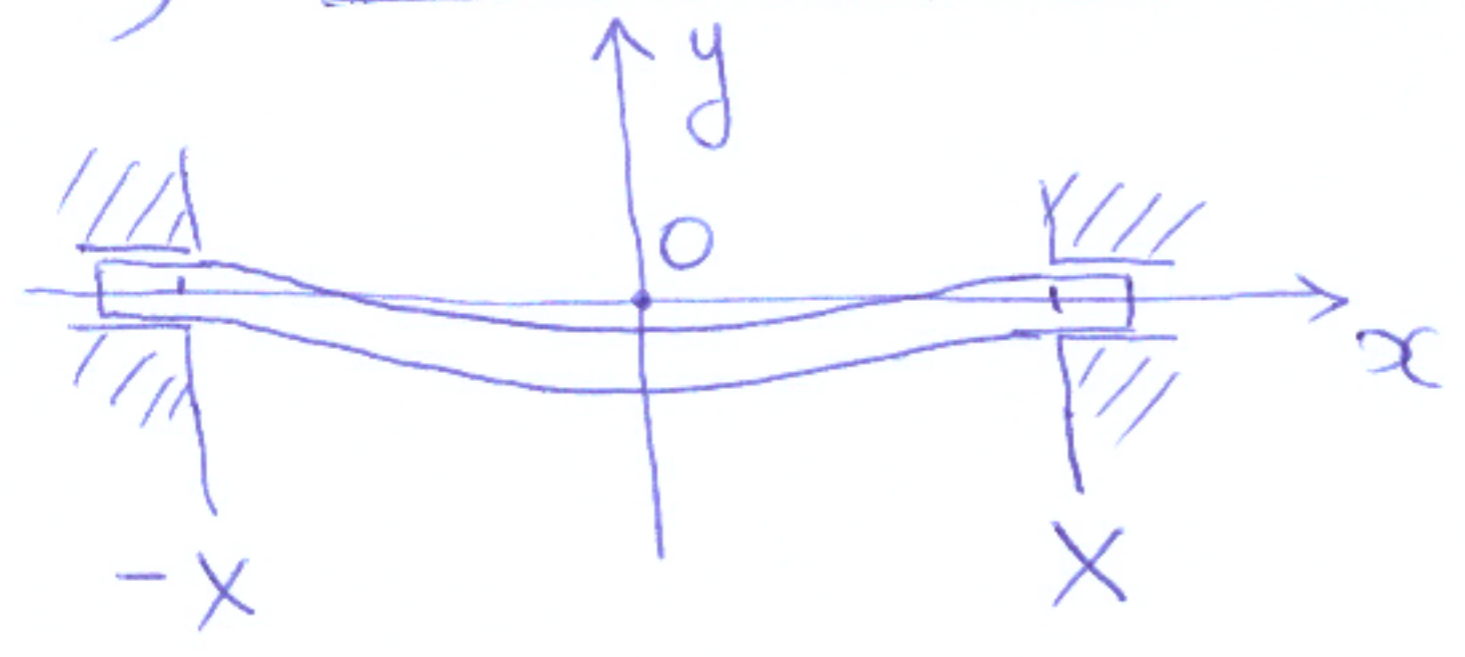
$$y'''' + \frac{\rho g}{\alpha} = 0$$

Общее его решение: $y(x) = -\frac{\rho g}{4!x} x^4 + P^{(3)}(x)$,

где $P^{(3)}(x)$ - полином 3-й степени от x .

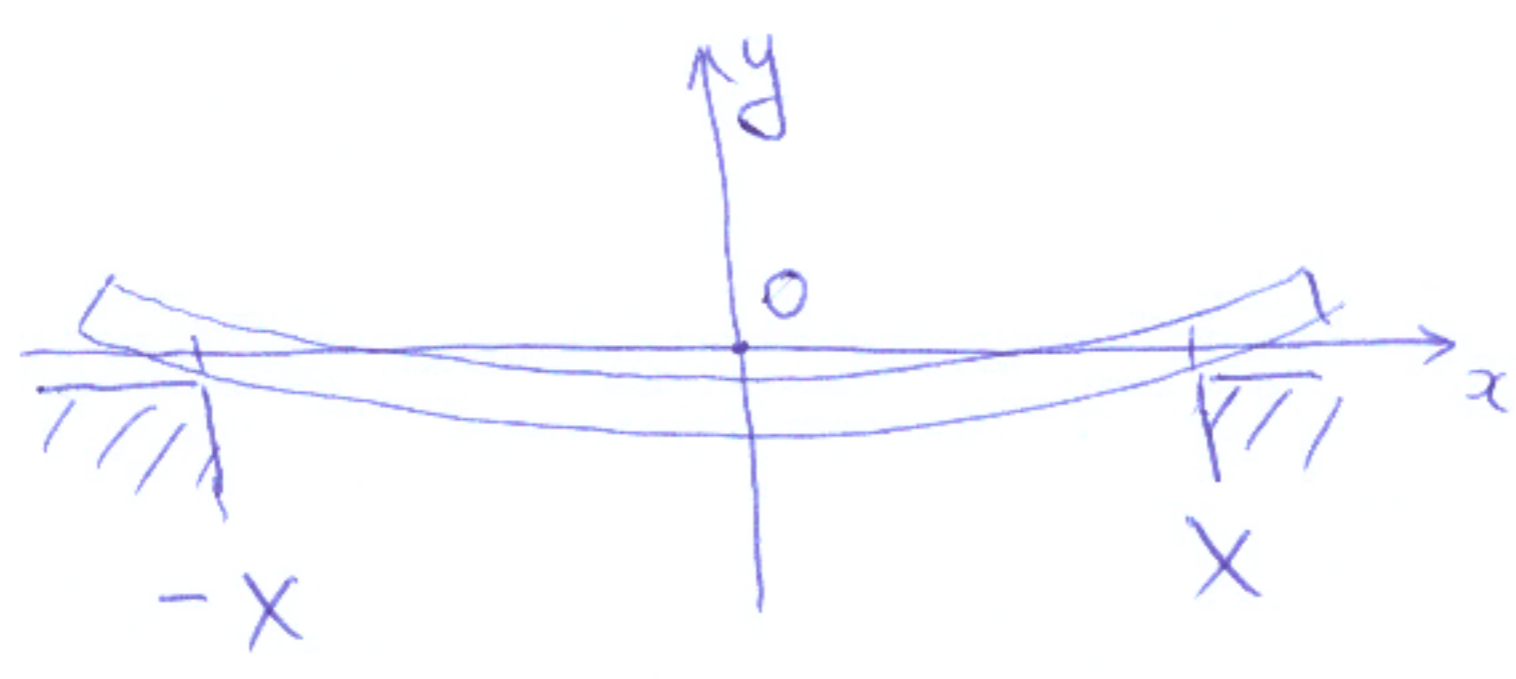
Конкретная форма балки зависит от граничных условий. Интересное гранич. условие, разбиравшиеся на семинаре:

а) Балка - межэтажное перекрытие



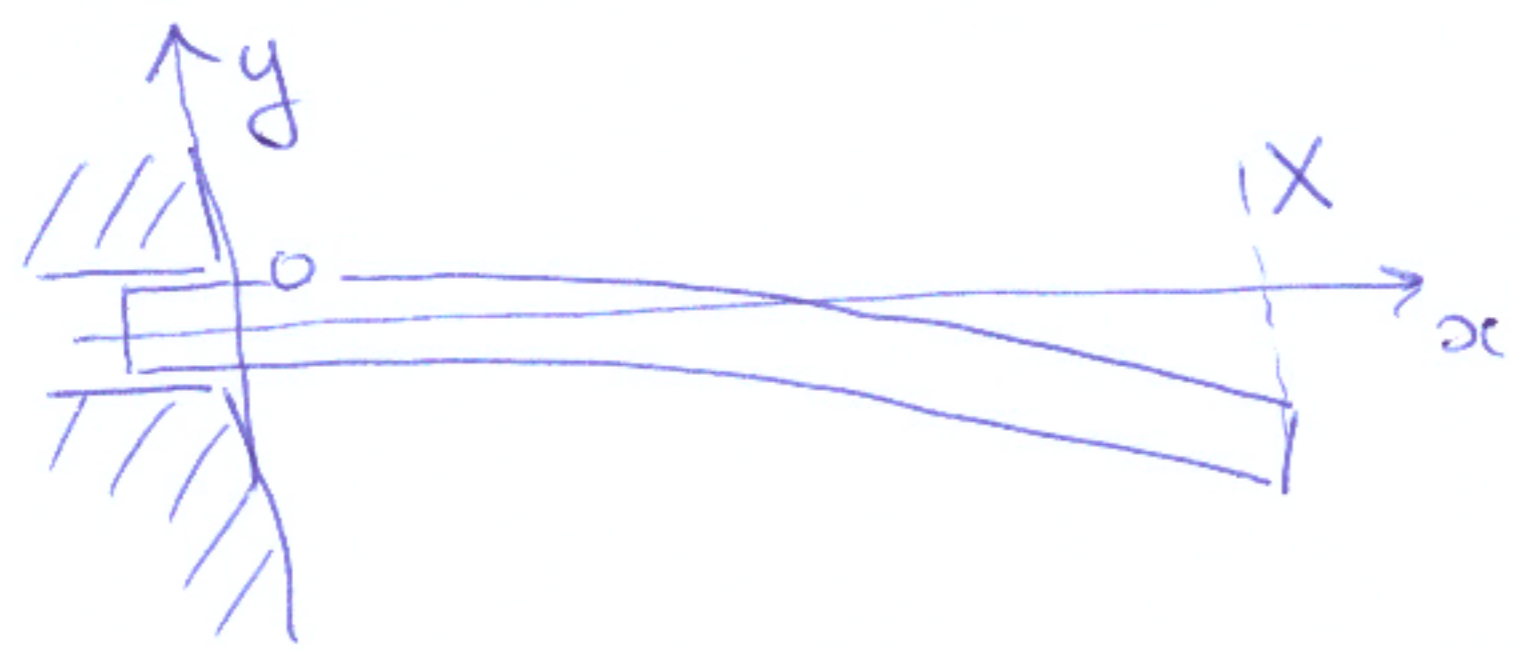
$$y(\pm x) = y'(\pm x) = 0$$

б) Балка - мостик



$$y(\pm x) = 0$$
$$\delta y'(\pm x) - \forall$$

в) Балка - трамплин



$$y(0) = y'(0) = 0$$
$$y(x), y'(x) - \forall$$

3) Задачи на условный экстремум.

9

Метод множителей Лагранжа.

Переходя от Ньютонова формализма к лагранжеву с помощью принципа Даламбера, мы удачно поборолась с силами реакции связей. В лагранжевом формализме их нет, они не мешают решать уравнения Эйлера-Лагранжа. Однако иногда их все же полезно знать (чтобы мосты не лошались, например).

Рассмотрим метод восстановления сил реакции связей методом множителей Лагранжа.

Пусть, как в лекции 5, у нас имеется система n материальных точек. Их радиус-векторы \vec{r}_i , $i=1, \dots, n$, и на них, помимо потенциальных сил, действуют силы реакции идеальных связей \vec{N}_i .

Пусть на систему точек наложено $3n - N$ идеальных связей вида:

$$f_a(\vec{r}_i, t) = 0, \quad a = 1, \dots, 3n - N. \quad (7a)$$

(считаем связи f_a функционально независимыми), которые можно легко разрешить с использованием параметров q_α , $\alpha = 1, \dots, N$ — обобщенных координат системы:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t), \quad (7b)$$

так что $f_a(\vec{r}_i(q, t), t) \equiv 0$. После ка- (10)
жекие связи у системы остаются N степеней свободы.

Утверждается, что силы реакции идеальных
связей можно представить в виде

$$\vec{R}_i = \sum_{a=1}^{3n-N} \lambda_a \overrightarrow{\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}}, \quad (8)$$

выбрав подходящие λ_a , причем параметры λ_a ,
называемые множителями Лагранжа определяются
единственным образом.

Действительно, в системе (8) $3n$ уравнений,
она линейна по $(3n-N)$ переменным λ_a , и
прямоугольная $(3n-N) \times 3n$ матрица $\overrightarrow{\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}}$,
стоящая при λ_a , имеет максимальной возмож-
ный ранг: $\text{rk} \left\| \overrightarrow{\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}} \right\| = 3n-N$ (т.к. связи f_a
функционально независимы). При этом у матрицы
 $\overrightarrow{\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}}$ есть N правых 0-векторов $\delta_\alpha \vec{r}_i$:

$$\left(\overrightarrow{\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}}, \delta_\alpha \vec{r}_i \right) = 0 \quad \alpha = 1 \dots N$$

Здесь $\delta_\alpha \vec{r}_i$ — некоторый базис касательных
векторов к поверхности связей (время t — фиксиро-
вано в условиях связей). Действительно, везде

$\overrightarrow{\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}}$ ортогональны к этой касательной поверхности.

В лекции 5 векторы $\delta_\alpha \vec{r}_i$ мы называли (11)
виртуальными перемещениями. Принцип Даламбера утверждает, что

Даламбера утверждает, что

$$\boxed{(\vec{N}_i, \delta_\alpha \vec{r}_i) = 0, \alpha = 1, \dots, N, (9)}$$

и эти условия являются условиями разрешимости системы относительно λ_α . Итак, (9) гарантирует однозначную разрешимость (8).

Заметим, что выражения (8) для сил реакции имеют потенциальный вид:

$$\boxed{\vec{N}_i = - \frac{\partial U_{\text{реакц.}}}{\partial \vec{r}_i}, \text{ где } U_{\text{реакц.}} = - \sum_{\alpha=1}^{3n-N} \lambda_\alpha f_\alpha(\vec{r}_i, t)}$$

и λ_α рассматриваются как независимые от \vec{r}_i переменные

Итак, вместо ограничения числа переменных в задании с \vec{r}_i до 9α , мы расширим с \vec{r}_i до $\vec{r}_i + \lambda_\alpha$, и рассмотрим мех. систему с лагранжианом

$$\boxed{L_{\text{новой}}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = L_{\text{исходной}}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \lambda_\alpha) - U_{\text{реакц.}} = L_{\text{исх.}}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \sum_{\alpha} \lambda_\alpha f_\alpha(\vec{r}_i, t) (10)}$$

При этом уравнения Эйлера-Лагранжа для переменных λ_a :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{нов}}{\partial \dot{\lambda}_a} - \frac{\partial L_{нов}}{\partial \lambda_a} = - f_a(\vec{r}_i, t) = 0$$

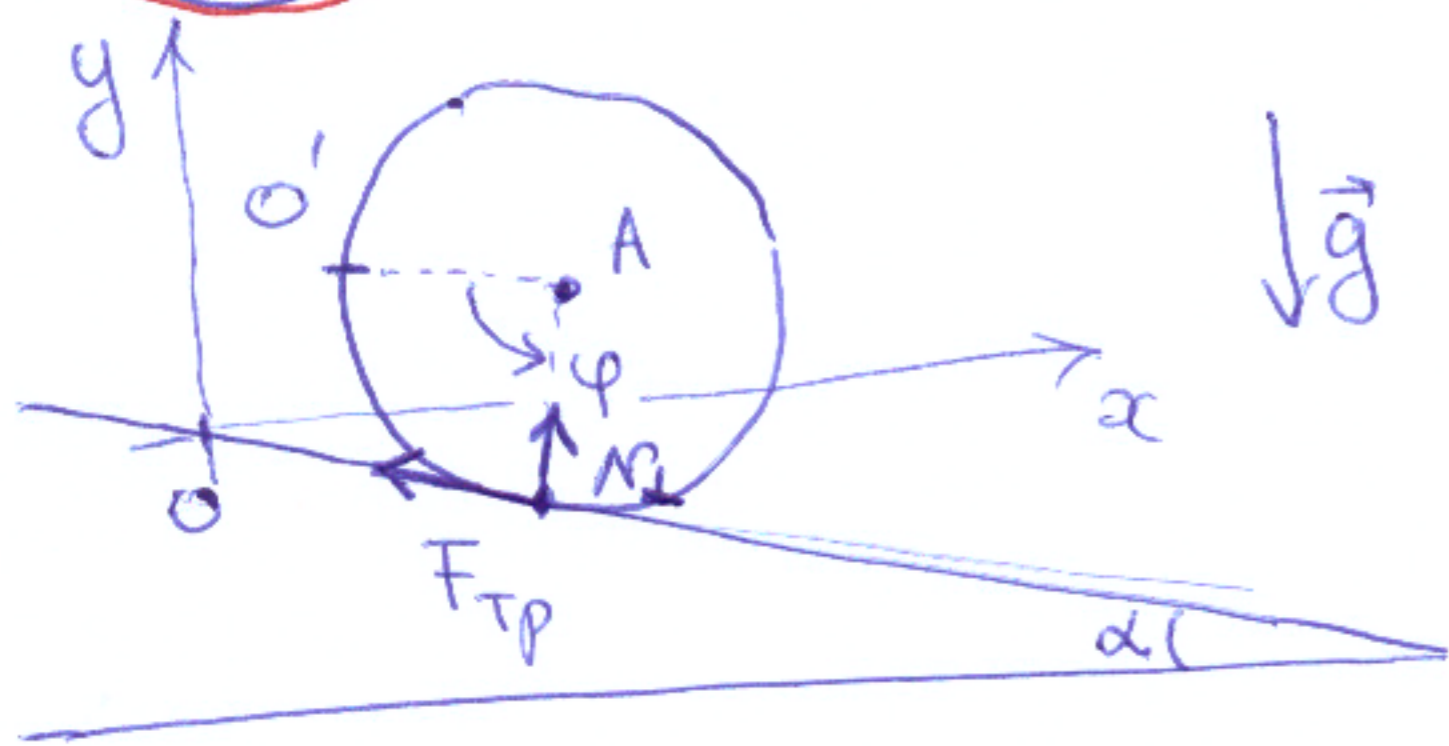
воспроизводит условия связей, а уравнения для переменных \vec{r}_i принимают вид

$$L_{нов}, \vec{r}_i: \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{исх}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L_{исх}}{\partial \vec{r}_i} = \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}$$

Они разрешены относительно λ_a (как линейная система уравнений) и относительно $\vec{r}_i(t)$ (как система дифуров 2-го порядка на поверхности связей $f_a = 0$). После определения λ_a силы реакции связей определяются формулой (8).

Примеры:

Задача 3а: Колесо на наклонной плоскости



Колесо без проскальзывания скатывается по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Масса колеса M распределена равномерно по его периметру, так что центр масс находится в центре колеса A .

Координаты свободного колеса: x, y — декартовы координаты центра масс и φ — угол пово-

рота вокруг центра масс.

Условие непроскальзывания накладывается на них связи:

$$\begin{cases} f_1 = x - R\varphi \cos\alpha = 0 \\ f_2 = y + R\varphi \sin\alpha = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Здесь α - угол наклона плоскости, R - радиус колеса.
Лагранжиан свободного колеса в поле тяжести:

$$L_{\text{исх}} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 - \underline{mg y}$$

потенциальная энергия, как будто вся масса колеса m сосредоточена в центре масс.

Лагранжиан с множителями Лагранжа:

$$L_{\text{нов}} = L_{\text{исх.}} + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

Уравнения Э.-Л. по λ_1 и λ_2 восстанавливают условия связей (11).

Уравнения Э.-Л. по переменным x, y, φ :

$$L_x: m\ddot{x} = \lambda_1$$

$$L_y: m\ddot{y} + mg = \lambda_2$$

$$L_\varphi: mR^2\ddot{\varphi} + \lambda_1 R \cos\alpha - \lambda_2 R \sin\alpha = 0$$

С учётом связей (11) решаем L_φ относительно φ :

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{2} \frac{\sin\alpha}{R}$$

откуда вычислим множители Лагранжа

$$\lambda_1 = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{2}, \quad \lambda_2 = mg \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2}\right)$$

Как нетрудно заметить, формула (8) даёт выражение для проекций сил реакции \vec{N} на оси $O\vec{x}$ и $O\vec{y}$:

$$N_x = \lambda_1, \quad N_y = \lambda_2$$

Для удобства интерпретации силу \vec{N} стоит разложить в проекции на наклонную плоскость по которой катится колесо — $N_{||}$, и на нормаль к ней — N_{\perp}

$$\begin{cases} N_{||} = N_x \cos \alpha - N_y \sin \alpha = -\frac{mg \sin \alpha}{2} \\ N_{\perp} = N_x \sin \alpha + N_y \cos \alpha = mg \cos \alpha \end{cases}$$

Очевидно $N_{||} = -F_{тр}$ — сила трения колеса о плоскость, N_{\perp} — сила реакции плоскости.

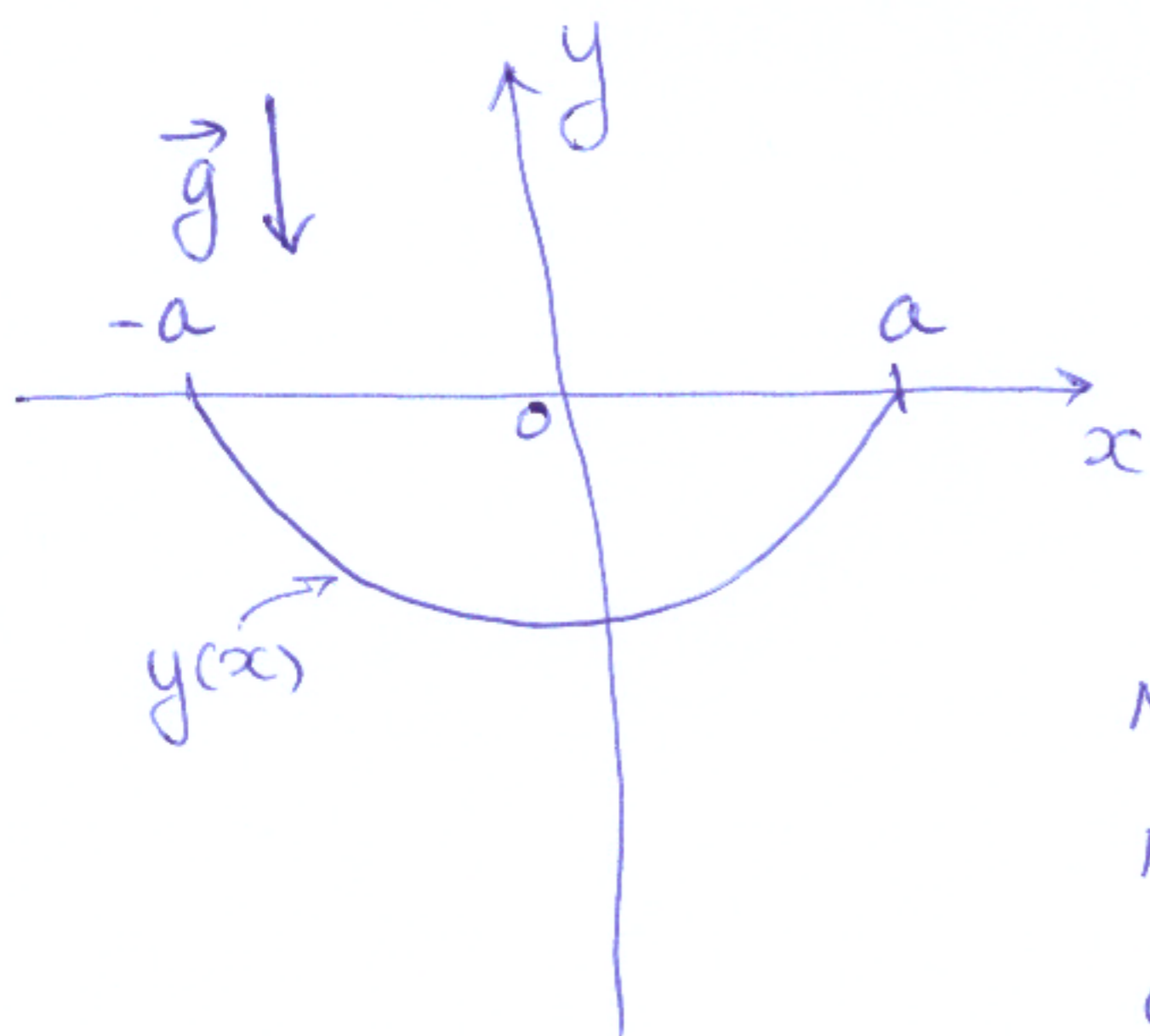
В задаче была еще одна независимая переменная — φ . Формула (8) даёт выражение и для сил реакции, относящихся к этой переменной:

$$N_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = R \frac{mg \sin \alpha}{2} = R \cdot F_{тр}$$

момент сил трения относительно центра колеса

38 Задача о цепной линии

15



Нерастяжимая, однородная массивная цепь массы m и длины l висит в однородном поле тяжести. Ее концы закреплены в точках a и $-a$ на оси Ox . Надо найти формулу $y(x)$ цепной линии.

Это задача статическая: цепь принимает форму с минимальной потенциальной энергией. Она нерастяжима, поэтому энергии сил упругости у нее нет, есть только энергия в поле тяжести

Здесь $\rho = \frac{m}{l}$ — линейная плотность цепи, $\sqrt{1+y'^2} dx = dl$ — инфинитезимальный элемент длины цепи.

$$U_{\text{тяж}}[y(x)] = \int_{-a}^a \rho g y(x) \sqrt{1+y'^2} dx$$

Однако минимизировать функционал $U_{\text{тяж}}[y(x)]$ надо не на всех кривых $y(x)$, а только на кривых длины l , то есть надо наложить условие:

$$l = \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx \quad (12)$$

Поэтому, введя множитель Лагранжа λ , мы (16) имеем экстремум функционала

$$U[y(x), \lambda] = \rho g \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} dx + \lambda \left(\int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx - l \right)$$

Уравнение Э.-Л. по переменной λ воспроизводит связь (12).

Вместо того, чтобы возмущать уравнение Э.-Л. по переменной $y(x)$, заметим, что "лагранжиан" (подинтегральное выражение) нашей системы не зависит явно от x (x - аналог времени в мех. системе), поэтому должна сохраняться "энергия" системы:

$$E = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} (\lambda + \rho g y) = \text{const}$$

$$\Downarrow$$
$$-E \sqrt{1+y'^2} = \lambda + \rho g y$$

$$\Downarrow$$
$$\frac{E dy}{\sqrt{(\lambda + \rho g y)^2 - E^2}} = \pm dx$$

Подстановка $\lambda + \rho g y(x) = E \operatorname{ch} \theta(x)$ позволяет легко интегрировать это уравнение:

$$\theta(x) = \frac{\rho g}{E} x + \theta_0, \text{ т.е.}$$

$$y(x) = \frac{E}{\rho g} \operatorname{ch} \left(\frac{\rho g}{E} x + \theta_0 \right) - \lambda \quad (13)$$

Симметричные граничные условия $y(a) = y(-a) = 0$ (17)

фиксируют $\theta_0 = 0$ и $\lambda = \frac{E}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a\right)$

Заметим, что если бы мы не ввели в задачу множитель Лангранжа λ , у нас бы не было возможности подобрать параметров θ_0 и E в общем решении (13) удовлетворить граничным условиям $y(a) = y(-a) = 0$.
То есть функционал $U_{\text{тех}}$ бы не имел экстремума!

Итак, фиксация граничных условий приводит решение (13) к виду:

$$y(x) = \frac{E}{\rho g} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a\right) \right)$$

Остающийся параметр E необходим для выполнения условия связи (12).

Элементарное возмещение длины линии $y(x)$ даёт:

$$\frac{2E}{\rho g} \operatorname{sh}\left(\frac{\rho g}{E} a\right) = l$$

Заменяя E на $z = \frac{\rho g}{E} a$, получаем уравнение

$$\operatorname{sh}(z) = \frac{l}{2a} z,$$

которое разрешимо относительно z единственным образом (нас интересует $E > 0$, т.е. $z > 0$) если, и только если $l > 2a$, то есть если длина цепи превосходит расстояние между её концами.