

Семинар 21.
Задачи по повторению

Задача 1. Напишите уравнение квадрики в пространстве $\mathbb{P}^3$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, содержащей прямые $l_1 = \{x_0 = x_1 = 0\}$, $l_1 = \{x_2 = x_3 = 0\}$ и $l_2 = \{x_0 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

Задача 2. Найдите порядок стабилизатора плоскости $\mathbb{P}^2$ в группе $PGL(4, \mathbf{F}_4)$, действующей на 3-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbf{F}_4$ из 4 элементов: $\mathbf{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$, где $\alpha^2 = \alpha+1$.

Задача 3. Для произвольного комплексного векторного пространства V (соответственно, вещественного векторного пространства W) через $V_{\mathbb{R}}$ обозначим его о веществление (соответственно, через $W^{\mathbb{C}}$ обозначим его комплексификацию). Для линейного оператора $f : V \rightarrow V$ рассмотрим его о веществление $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$, и пусть $F = (f_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} : (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \rightarrow (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ - комплексификация оператора $f_{\mathbb{R}}$. Как связаны между собой:

- а) характеристические многочлены операторов f и F ;
- б) собственные числа этих операторов;
- в) собственные векторы этих операторов?

Задача 4. Найдите образ точки $A = (1, 0, 0)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ при повороте на угол $+\frac{\pi}{2}$ около оси l с направляющим вектором $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, проходящей через точку $B = (0, 0, 1)$. (Положительное направление поворота на угол ϕ , $0 < \phi \leq \pi$, определяется по правилу винта - это объяснялось на лекциях.)

Задача 5. Евклидова плоскость E^2 дополнена до проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ добавлением бесконечно удаленной прямой l_{∞} . Найдите угол между двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2 в E^2 в терминах двойного отношения взятых подходящим образом точек на l_{∞} . Как выглядит в этих терминах условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2 ? Как записать в терминах точек на l_{∞} условие того, что коника C в E^2 является окружностью?

Дополнительные задачи к семинару 20

Задача 1. Дана точка в модели Кэли-Клейна. Как с помощью циркуля и линейки построить отвечающую ей точку в модели Пуанкаре в круге?

Задача 2. *Круговой плоскостью* называется евклидова плоскость E^2 с одной добавленной "бесконечно удаленной" точкой ∞ , в которой пересекаются все прямые. *Круговым преобразованием*, или *преобразованием Мёбиуса* круговой плоскости называется композиция любого числа инверсий (в том числе симметрий относительно прямых).

Докажите, что:

- (1) всякое подобие является круговым преобразованием;
- (2) всякое круговое преобразование, сохраняющее точку ∞ , является преобразованием подобия;
- (3) всякое круговое преобразование, не сохраняющее точку ∞ , единственным образом представляется в виде композиции инверсии и подобия.