Вычислимость (семинар 8)

1. Докажите, что существует бесконечно много перечислимых неразрешимых множеств натуральных чисел.
2. Докажите, что для любых $A,B \subset \mathbf{N}$ существует множество $A \oplus B \subset \mathbf{N}$ со следующими свойствами:
   (1) $A \leq_m A \oplus B$,
   (2) $B \leq_m A \oplus B$,
   (3) для любого C, такого что $A \leq_m C$, $B \leq_m C$, выполняется $A \oplus B \leq_m C$.
3. Постройте неперечислимое множество натуральных чисел с неперечислимым дополнением.
4. Докажите, что $K_0 := \mathrm{dom}\, F$ — неразрешимое множество (F — универсальная функция) (было на лекции).
5. Докажите, что неразрешима проблема остановки для машин Тьюринга, работающих с натуральными числами, т. е. множество
   $\{(\mathrm{Code}(M),n) \mid M$ останавливается на входе $\bar{n}\}$ неразрешимо.
6. Докажите, что множество $\{x \mid \varphi_x(2x)$ определено$\}$ неразрешимо.
7. Докажите, что всякое перечислимое множество натуральных чисел m-сводится к K_0.
8. Докажите, что множество $\{(x,y) \mid \varphi_x = \varphi_y\}$ неразрешимо.
9. Докажите, что $\{x \mid \varphi_x(0)$ определена$\}$ перечислимо, но неразрешимо.
10. Докажите, что $\{x \mid \varphi_x$ нигде не определена$\}$ неперечислимо.
11. Докажите, что $\{x \mid \varphi_x$ всюду определена$\}$ неперечислимо. (Указание: постройте диагональную функцию в предполагаемой нумерации).
12. Докажите, что существует n такое, что $\mathrm{dom}\, \varphi_n = \{n\}$.