Программа курса «Логика и алгоритмы»

Логика высказываний

1. Пропозициональные формулы. Лемма об однозначном анализе (без док.). Оценки и их продолжения на формулы. Равносильные формулы. Тавтологии.
2. Исчисление высказываний (CL). Выводы (формальные доказательства) и теоремы CL.
3. Вывод формулы $A \to A$. Вывод из гипотез.
4. Свойства отношения выводимости. Допустимые и производные правила. Примеры допустимых правил.
5. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.
6. Теорема корректности для CL.
7. Независимость схемы (A10) $\neg A \to (A \to B)$ от остальных аксиом CL.
8. Непротиворечивые множества формул. Свойства максимальных непротиворечивых подмножеств.
9. Выполнимость непротиворечивых множеств. Теорема о семантической полноте CL.

Исчисление предикатов.

10. Сигнатура. Термы, атомарные формулы, формулы. Лемма об однозначном анализе (без док.). Свободные и связанные вхождения переменных. Параметры формулы. Замкнутые термы и формулы.

11. Модель данной сигнатуры. Расширенная сигнатура модели. Оцененные термы и формулы. Значение оцененного терма. Значение оценненной формулы. Выполнимость и общезначимость для замкнутых формул.

12. Свободная подстановка терма вместо переменной в формулу.

13. Исчисление предикатов без равенства (PC). Вывод из гипотез. Свойства отношения выводимости. Допустимые и производные правила.

14. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.

15. Непротиворечивость PC.

16. Лемма о выводимости примеров тавтологиий в PC.

17. Примеры теорем и производных правил в PC: правила Бернайса, монотонность для кванторов, переименование связанной переменной, взаимодействие кванторов с отрицанием.

18. Теории первого порядка и их модели. Логическое (семантическое) следование. Элементарная теория модели (Th(M)). Элементарная эквивалентность моделей. Полные теории. Критерий полноты теории: элементарная эквивалентность всех ее моделей.

19. Гомоморфизм и изоморфизм моделей. Преобразование значений термов при гомоморфизме. Сохранение значений формул при сюръективном гомоморфизме.

20. Изоморфность моделей. Изоморфные модели элементарно эквивалентны.

21. Исчисление предикатов с равенством. Нормальные модели. Нормализация модели аксиом равенства.

22. Сильная категоричность (для теорий с равенством). Полнота сильно категоричных теорий. Теорема: если M — конечная модель конечной сигнатуры, то Th(M) конечно сильно категорична. Следствие: совпадение элементарной эквивалентности и изоморфности для конечных моделей конечной сигнатуры.

23. Универсальное замыкание. Общезначимые формулы. Общезначимость примеров тавтологий.

24. Теорема корректности исчисления предикатов без равенства: формулировка и план доказательства.

25. Общезначимость двух предикатных аксиом (Бернайса). Сохранение общезначимости при применении MP и Gen.

26. «Технические леммы» о подстановке термов в термы и формулы. Общезначимость аксиом $\forall x\, \alpha \to [t/x]\, \alpha$, $[t/x]\, \alpha \to \exists x\, \alpha$.

27. Корректность исчисления предикатов с равенством относительно нормальных моделей. Теорема корректности для теорий (без равенства и с равенством).

28. Непротиворечивые теории. Свойства: в противоречивой теории доказуемы все формулы; если $T \cup \{\alpha\}$ противоречива, то $T \vdash \neg \alpha$. Непротиворечивость выполнимой теории.

Введение в теорию моделей.

29. Пример: арифметика Пеано (PA). Стандартная модель PA.

30. Свидетели; теории Хенкина. Лемма о свежей константе. Лемма Хенкина.

31. Свойства максимальных непротиворечивых теорий. Лемма Линденбаума.

32. Модель максимальной непротиворечивой теории Хенкина, построенная из замкнутых термов. Мощность этой модели.

33. Теорема о существовании модели для непротиворечивой теории (без равенства и с равенством). Теорема Гёделя о полноте.

34. Теорема Гёделя — Мальцева о компактности для теорий первого порядка.

35. Теорема о повышении мощности до бесконечной.

36. Теорема Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности.

37. Существование нестандартных моделей арифметики.

38. Теорема Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности до любой бесконечной.

39. Полные теории. k-категоричность. Признак полноты Лося — Вота.

40. Теорема Морли о категоричности (формулировка). Теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} k-категорична для всех бесконечных k.

41. Теория TFD делимых абелевых групп без кручения. Построение векторного пространства над **Q** для модели TFD.

42. Теорема Хамеля о базисе. Мощность векторного пространства над **Q** бесконечной размерности k. Изоморфность пространств одинаковой размерности.

43. Категоричность теории TFD в любой несчетной мощности.

44. Простые формулы в сигнатуре без функциональных символов. Приведение каждой формулы к простому виду.

45. Кванторный ранг. Формульная n-эквивалентность кортежей индивидов в моделях.

46. Игры Эренфойхта. Определения: ходы, партии, позиции, условие выигрыша. Стратегия и выигрышная стратегия Консерватора. Игровая n-эквивалентность.

47. Индуктивное описание игровой эквивалентности. Конечность числа классов игровой n-эквивалентности.

48. Теорема Эренфойхта — Фраиссе о совпадении игровой и формульной n-эквивалентности. Следствие: признак элементарной эквивалентности моделей.

49. Пример: в сигнатуре {=} все достаточно большие модели n-эквивалентны. Следствие:

в этой сигнатуре нет формулы, выделяющей конечные множества четной мощности из всех конечных.

50. Свойство конечной модели для формул без равенства с одноместными предикатами.
51. Бесконечные игры Эренфойхта. Игровая ω-эквивалентность. Изоморфность ω-эквивалентных счетных моделей.
52. Теория DLO неограниченных плотных линейных порядков $\aleph_0$-категорична (теорема Кантора).

Теория алгоритмов.

53. Определение машины Тьюринга. Конфигурации. Формальное описание работы машины Тьюринга.
54. Определение вычислимой частичной функции – на словах в конечном алфавите и на кортежах натуральных чисел. Тезис Чёрча – Тьюринга.
55. Теорема о вычислимой нумерации (кодировании) кортежей натуральных чисел и слов (формулировка). Обращение вычислимой нумерации.
56. Композиция вычислимых функций.
57. Разрешимые множества. Булевы операции над ними. Разрешимость конечных множеств. Примеры разрешимых подмножеств **N**.
58. Полуразрешимые множества. Сохранение разрешимости и полуразрешимости для номеров при вычислимой нумерации.
59. Объединение и пересечение полуразрешимых множеств.
60. Теорема Поста (критерий разрешимости).
61. Перечислимые множества натуральных чисел. 5 эквивалентных определений перечислимости.
62. Перечислимые множества слов.
63. Образы и прообразы разрешимых и перечислимых множеств при вычислимых тотальных функциях.
64. Разрешимость множества формул в конечной сигнатуре.
65. Разрешимость множества доказательств в теории 1 порядка с разрешимым множеством аксиом. Перечислимость множества теорем.
66. Разрешимость полной теории с перечислимым множеством теорем.
67. Кодирование машин Тьюринга натуральными числами.
68. Разрешимость множества программ и множества кодов машин Тьюринга.
69. Определение универсальной машины Тьюринга.
70. Описание работы универсальной машины Тьюринга.
71. Теорема об универсальной вычислимой функции (для функций на натуральных числах).
72. Построение перечислимого неразрешимого множества натуральных чисел.
73. Неразрешимость области определения универсальной вычислимой функции. Проблема остановки для машин Тьюринга.

74. Отношение m-сводимости для множеств натуральных чисел; простейшие его свойства.
75. Теорема о главной нумерации для вычислимых функций на натуральных числах.
76. Теорема Клини о неподвижной точке. Функция, вычисляющая свой номер.
77. Индексные множества. Теорема Успенского — Райса.
78. Конгруэнции на словах. Задание полугруппы (моноида) образующими и соотношениями. Системы соотношений и системы Туэ. Проблема тождества слов.
79. Построение системы Туэ по машине Тьюринга. Теорема Поста – Маркова.
80. Неразрешимость теории моноидов. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов.
81. Разрешимость исчисления одноместных предикатов (доказательство для сигнатуры без равенства).
82. Арифметичность перечислимых множеств (схема доказательства).
83. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметических теорий.

Литература.

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления. http://www.mccme.ru
2. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.
2. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.
3. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник", 2005.
4. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.
5. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.
6. W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.
7. D. Marker. Model theory. An introduction. Springer, 2002.
8. L. Libkin. Elements of finite model theory. Springer, 2012.
9. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3: Вычислимые функции . http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part3-2.pdf
10. У. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Мир, 1972.
11. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 3. Теория рекурсии. М., Наука, 1982.
12. А.И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., Наука, 1965.
13. С.К. Клини. Введение в метаматематику. М, Либроком, 2009.