Алгебра. Второй курс. Семинар 1

При решении первых 5 задач из этого листочка можно пользоваться критерием Эйзенштейна, который состоит в следующем. Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

- многочлен с целыми коеффицентами, и для некоторого простого числа p выполняются следующие условия:

- $p \mid a_i$ для любогоi от 0 до $n-1$,
- $p^2 \nmid a_0$

Тогда многочлен $f(x)$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.
Задача 1. (а) Докажите, что многочлены $x^5 - 2$ и $x^5 - 4$ неприводимы в $\mathbb{Q}[x]$.
(б) Докажите, что для любого простого числа p и натурального числа n многочлен

$$f(x) = \frac{x^{p^n} - 1}{x^{p^{n-1}} - 1} = x^{(p-1)p^{n-1}} + x^{(p-2)p^{n-1}} + \cdots x^{p^{n-1}} + 1$$

неприводим в $\mathbb{Q}[x]$. (Рассмотрите многочлен $f(x+1)$.)
Задача 2. Найдите степени расширениий
(а) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$
(б) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$
(в) $[\mathbb{Q}(\exp \frac{2\pi i}{p^n}) : \mathbb{Q}]$, где p - простое число, а n - натуральное.
(г) $[\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{p^n}) : \mathbb{Q}]$, где p - простое число, а n - натуральное.
Задача 3. Сколько корней имеет многочлен $y^4 - 2$ в поле $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 2)$?
Задача 4. Является ли кольцо $\mathbb{F}_3[x]/(x^4 - 2)$ полем?
Задача 5. На плоскости дан отрезок длины 1. Докажите, что с помощью циркуля и линейки можно построить только такие отрезки, длины которых выражаются в квадратных радикалах и только их.
Задача 6. (а) Докажите, что с помощью циркуля и линейки нельзя построить правильный 7-угольник.
(б) А можно ли построить правильный 9-угольник?
Задача 7. Докажите критерий Эйзенштейна.