Алгебра. Второй курс. Листок 1

Задача 1. (Китайская теорема об остатках.) Пусть R - коммутативное кольцо. Идеалы $I, J \subset R$ называются взаимно простыми, если $I + J = R$. Докажите, что для любого набора попарно взаимно простых идеалов $I_1, \cdots I_n \subset R$ естественные отображения

$$R/I_1 I_2 \cdots I_n \to R/\cap_i I_i \to \bigoplus_i R/I_i$$

- изоморфизмы. Здесь $I_1 I_2 \cdots I_n$ - произведение идеалов, т.е. идеал, порожденный элементами вида $a_1 \cdots a_n$, где $a_i \in I_i$.

Задача 2. Пусть R - конечномерная коммутативная алгебра над полем k. Докажите, что любой простой идеал в R - максимальный. Также докажите, что в R только конечное число простых идеалов.

Задача 3. Пусть $f(x) \in K[x]$ - неприводимый многочлен степени n , а L/K конечное расширение степени m. Докажите, что если числа m и n взаимнопросты, то многочлен $f(x)$ неприводим над K.

Задача 4. Найдите минимальный многочлен $\exp \frac{2\pi i}{5}$ над $\mathbb{Q}$, над $\mathbb{Q}(i)$ и над $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Задача 5. На плоскости нарисован угол $\frac{2\pi}{N}$, $(0 < N \in \mathbb{Z})$. Докажите, что с помощью циркуля и линейки его можно поделить на три равные части (т. е. построить угол $\frac{2\pi}{3N}$) тогда и только тогда, когда $3 \nmid N$. (Воспользуйтесь формулой $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$.)

Задача 6. Теорема Гаусса-Ванцеля утверждает, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник тогда и только тогда, когда число n имеет вид $n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k$, где p_i - попарно различные нечетные простые числа вида $2^r + 1$. Докажите необходимость этого условия. (Эту часть теоремы доказал Ванцель в 1836 году).

Задача 7. Пусть $n_1, \cdots n_m$ попарно взаимно простые натуральные числа такие, что числа $\sqrt[3]{n_i}$ не лежат в $\mathbb{Q}$. Докажите, что

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{n_1} + \cdots + \sqrt[3]{n_m}), \mathbb{Q}] = 3^m.$$