Дискретная математика, сентябрь-октябрь 2018, матфак ВШЭ

Задачи для досрочного экзамена

Эти задачи являются письменной частью досрочного экзамена по дискретной математике. Их письменное решение нужно принести на устное собеседование, которое состоится 12 сентября в 13.30 в аудитории 427. Каждый пункт засчитывается за отдельную задачу, пункт со звездочкой за две, задача с двумя звездочками - за три. Для прохождения собеседования необходимо правильно решить 22 задачи

1. Докажите, что $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Пусть $f = g \circ h$. Покажите, что из инъективности g и h следует инъективность f, а из сюрьективности g и h следует сюрьективность f. В другую сторону: пусть f инъективно. Что можно сказать про отображения g и h? А если f сюрьективно?

3. Является ли формула $((p \vee q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$ тавтологией?

4. Отображения $g : A \to B$ и $h : B \to C$ таковы, что $(h \circ g)(A) \neq C$. Пусть $\varphi = (\exists\, b \in B)(\forall\, a \in A)\; b \neq g(a)$ и $\psi = (\exists\, c \in C)(\forall\, b \in B)\; c \neq h(b)$.

(1) Можно ли утверждать, что верно φ? Можно ли утверждать, что верно ψ?
(2) Можно ли утверждать, что верно $\varphi \vee \psi$?

5. *Штрих Шеффера* определяется так: $p|q = \neg(p \wedge q)$. Выразите через штрих Шеффера операции $\neg, \vee, \wedge$.

6. Сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k пронумерованным ящикам?

7. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы между любыми двумя единицами находилось не менее m нулей?

8. а) Сколькими способами можно разбить выпуклый n - угольник на треугольники непересекающимися диагоналями (в вершинах n - угольника пересечения разрешены)?
б) В силу ассоциативности умножения произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ можно вычислять многими способами, по разному расставляя скобки (но не меняя порядок сомножителей). Сколько таких способов? Какова связь этой задачи с предыдущей?

9. Докажите,что:

$$a)\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{r}=3^n; \qquad б)^*\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-1}{k}. \quad (m,n>0)$$

10. Найдите коэффициент при x^7 в разложении $(1 - x + 2x^2)^{10}$.

11. Пусть $M = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ и $N = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_m\}$ – два конечных линейно упорядоченных множества. Сколько существует:
а) биективных; инъективных;
б) монотонно неубывающих; монотонно возрастающих;
в) неубывающих сюрьективных;
г)* сюрьективных
отображений M в N?

12. Вычеты по модулю 5 определяются как классы эквивалентности множества целых чисел по отношению эквивалентности

$$n \equiv m \qquad \text{если} \qquad m - n \qquad \text{делится на} \qquad 5$$

Покажите, что на вычетах по модулю 5 корректно определены операции сложения, вычитания, умножения и деления

13. Определим на множестве $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus 0)$ отношение следующим образом:

$$(m, n) \sim (k, l) \text{ тогда и только тогда, когда } ml = nk.$$

Убедитесь, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Опишите множество классов эквивалентности. Определяют ли покоординатное умножение и покоординатное сложение соответствующие операции на этом множестве классов эквивалентностей?

14. Постройте отношение эквивалентностей на множестве бесконечных последовательностей из нулей и единиц, классы эквивалентности которого образуют модель множества действительных чисел.

15. * Множества M и N называются равномощными, если существует биективное отображение из M в N. Докажите , что отношение "$M < N$ если существует инъективное отображение M в N" задает отношение частичного порядка на классах эквивалентности равномощных множеств;

16. ** Начальным интервалом вполне упорядоченного множества M (т.е., линейно упорядоченного множества, в котором каждое непустое подмножество содержит минимальный элемент) называется всякое подмножество M, состоящее из элементов, строго меньших данного, а также само множество M. Покажите, что условие "вполне упорядоченное множество A эквивалентно некоторому начальному интервалу C вполне упорядоченного множества B (т.е., существует монотонное взаимно-однозначное отображение A в C)", задает линейный порядок на классах эквивалентности вполне упорядоченных множеств. Опишите его на конечных и счетных множествах.

17. Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

18. Определите, на сколько и при каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{2n+5}{7n+17}$.

19. Запишите рациональные числа $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{3}$ в виде бесконечных дробей в двоичной системе счисления.

20. Решите уравнения в целых числах

$$a)\ 5x - 3y = 11; \qquad \text{б)} \qquad x^2 - xy - 2y^2 = 7.$$

21. а) Нарисуйте график $y = f(x)$ какой-нибудь биекции из [0;1] на [0;1). Докажите, что любая такая биекция имеет точки разрыва;
б*) Может ли такая функция иметь конечное число точек разрыва?

22. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — попарно различные числа из отрезка $[0; 1]$. Докажите, что найдётся число из отрезка $[0; 1]$, отличное от всех чисел $x_1, x_2, ..., x_n, \ldots$.

23. Пусть M и N — счетные множества. Докажите или опревергните следующие утверждения:
а) $M \cup N$ счетно; $M \times N$ счетно;
б)* множество всех биекций из M в M счетно.