

# Open problems in discrete field theory and geometry

Mikhail Skopenkov [mikhail-skopenkov@gmail.com](mailto:mikhail-skopenkov@gmail.com)

Это подборка открытых проблем в создаваемой на наших глазах дискретной теории поля, а также классической геометрии. Формулировки большинства задач элементарны и используют только небольшое количество определений, приведенных в тексте. В то же время их решение подводит к важным идеям современной математики. Каждая из нумерованных задач (кроме упражнений) может быть темой для курсовой работы. Задачи подходят для студентов любого курса. Также приводится подборка упражнений для быстрого введения в каждое из трех исследовательских направлений. А еще есть спецкурс в Высшей Школе Экономики в 2018/19 учебном году.

---

This is a collection of visual open problems in discrete field theory created in front of our eyes, and also in classical geometry. The statements of most problems are elementary and use only a few definitions given in the text. But their solution leads to important ideas of modern mathematics. Each individual problem with a number (except exercises) is a topic for a one-year term work. The problems are appropriate at any education term. A collection of exercises for quick introduction to the 3 research directions is also presented.

## Содержание

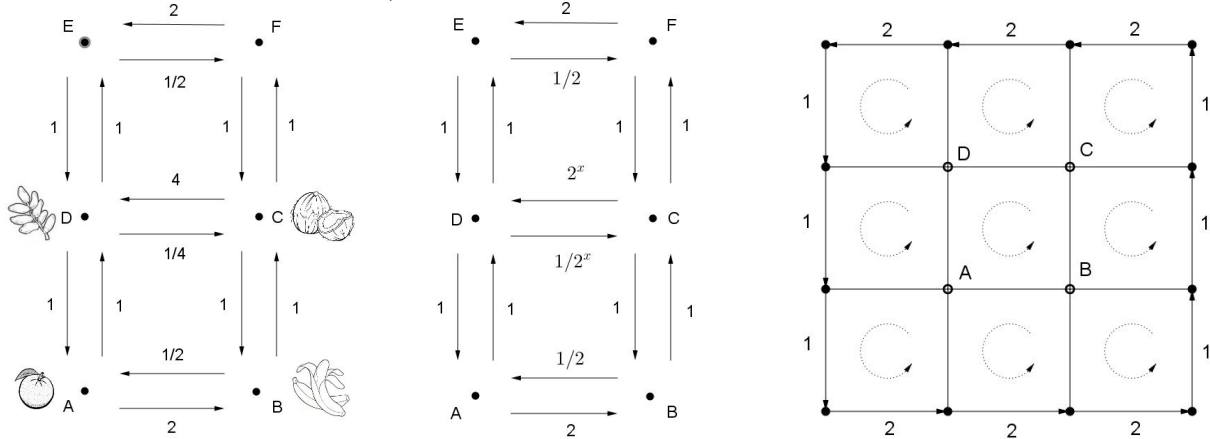
<b>Направление I. Дискретная теория поля</b>	<b>2</b>
1 Стартовые упражнения: игрушечная модель калибровочной теории	2
2 Открытые проблемы: одновременное протекание	3
3 Открытые проблемы: законы сохранения	4
<b>Направление II. Наглядная теория потенциала и замощения</b>	<b>6</b>
4 Стартовые упражнения	6
5 Открытые проблемы о замощениях с физической интерпретацией	7
<b>Направление III. Наглядная геометрия для архитектуры</b>	<b>8</b>
6 Стартовые упражнения	8
<b>Direction I. Discrete field theory</b>	<b>9</b>
3 Leading exercises: toy model of gauge theory	9
<b>Direction II. Visual potential theory and tilings</b>	<b>10</b>
4 Leading excercises	10
5 Open tiling problems with networks interpretation	11
6 Inverse problem for alternating-current networks	12
7 Asymptotic estimates for conductance	13
8 Convergence of discrete analytic functions to their continuous counterparts	13
<b>Direction III. Visual geometry for architecture</b>	<b>13</b>
9 Surfaces containing two parabolas through each point	14
10 Surfaces containing two circles through each point	15

# Открытые проблемы в дискретной теории поля

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

## 1. Стартовые упражнения: игрушечная модель калибровочной теории

Несколько городов соединены дорогами в форме решетки  $M \times N$ ; см. рисунок. В каждом городе свои товары (в неограниченном количестве). Например, в городе  $A$  — апельсины, в городе  $B$  — бананы. Для пары соседних городов  $A$  и  $B$  фиксирован курс обмена  $U(AB) > 0$ , например, 2 банана за апельсин. Курс симметричен, т.е.  $U(BA) = U(AB)^{-1}$ : за 2 банана получаем назад свой апельсин.



Хитрый горожанин может проехать вокруг квадрата  $ABCD$  размера  $1 \times 1$ , меняясь по пути, в результате чего его начальный запас товаров умножится на  $U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$ . Так, на рисунке слева он получит 8-кратную прибыль. Обозначим  $U(ABCD) := U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$ .

В частности, путешествие вокруг квадрата  $ABCD$  в том или ином направлении даст прибыль, если  $\log_2 U(ABCD) \neq 0$ . *Общий доход от спекуляций* измеряется суммой  $S[U]$  величин  $\log_2^2 U(ABCD)$  по всем квадратам  $ABCD$  размера  $1 \times 1$  (обходятся они против часовой). Так, на рисунке слева  $S[U] = \log_2^2 U(ABCD) + \log_2^2 U(DCFE) = (\log_2 8)^2 + (\log_2 \frac{1}{2})^2 = 10$ .

Вы — король и можете устанавливать курсы обмена везде, кроме границы решетки. Вы устанавливаете их, чтобы минимизировать величину  $S[U]$ . Полученные курсы назовем *оптимальными*.

1. Наведите порядок в королевстве на рисунке слева, т.е. подберите значение  $x$ , для которого минимален общий доход от спекуляций на рисунке в центре.

Заметим, что замена переменных  $x(AB) := \log_2 U(AB)$  сильно упрощает выражение для дохода:

$$S[x] := \sum_{ABCD} (x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA))^2.$$

Для квадрата  $ABCD$  размера  $1 \times 1$  обозначим  $x(ABCD) := x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA)$ . Так, на рисунке слева  $x(ABCD) = 3$ . Обозначим через  $W$  множитель, на который умножится запас товаров при путешествии по границе всей решетки против часовой стрелки. Так, на рисунке слева  $W = 4$ .

2. Предположим, что фиксированные курсы обмена на границе такие, как на рисунке, т.е.

$$U(AB) = \begin{cases} 2, & \text{если дорога } AB \text{ принадлежит северной или южной границе решетки} \\ & \text{и направлена против часовой стрелки вдоль границы;} \\ 1, & \text{если дорога } AB \text{ принадлежит восточной или западной границе решетки.} \end{cases}$$

Наведите порядок в королевстве для следующих размеров решетки, т.е. заполните таблицу:

Решетка	$1 \times 2$	$1 \times 3$	$1 \times N$	$2 \times 2$
Величина $W$	4			
Минимальное значение $S[U]$				
Оптимальные курсы для всех дорог				
Величины $x(AB)$ для всех дорог $AB$				
Величины $x(ABCD)$ для квадратов				

3. а) Для каких значений курса обмена на границе решетки  $M \times N$  можно достичь равенства  $S[U] = 0$ ?  
 б) Для каких значений  $M$  и  $N$  оптимальные курсы однозначно определяются курсами на границе?  
 в) Как связаны  $M$ ,  $N$ ,  $W$  и минимальный доход от спекуляций?  
 г) Какая из решеток —  $8 \times 8$  или  $7 \times 9$  — дает меньший доход от спекуляций при одинаковом  $W$ ?

# Открытые проблемы в дискретной теории поля

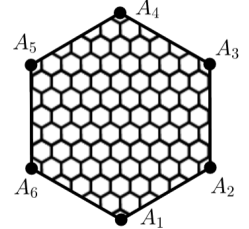
Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

Это подборка открытых проблем дискретной теории поля. Формулировки большинства задач используют только понятия, доступные первокурсникам, но их решение приводит к важным идеям современной математики. Каждая из нумерованных задач может быть темой для курсовой работы. Задачи подходят для студентов любого курса.

## 2. Открытые проблемы: одновременное протекание

В этих задачах известные вопросы о протекании жидкости обобщаются на несколько жидкостей.

Рассмотрим часть шестиугольной решетки со стороной клетки  $1/n$ , расположенную внутри правильного шестиугольника  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  со стороной 1 и центром в клетке  $O$ .



Пусть каждая клетка решетки окрашивается в один из 4 цветов (обозначаемых “0”, “1”, “2”, “3”) с равными вероятностями независимо друг от друга. Неформально, мы изучаем протекание трех жидкостей: цвета 1, 2, 3 означают, что клетка пропускает *только* жидкость 1, 2 или 3 соответственно, а цвет 0 — что *все* три жидкости сразу.

Пусть задана некоторая раскраска и число  $k = 1, 2$  или  $3$ . Будем говорить, что *жидкость  $k$  протекает между клетками  $x$  и  $y$* , если  $x$  и  $y$  можно соединить цепочкой клеток, соседних по стороне, в которой каждая клетка имеет цвет  $k$  или 0. Аналогично определяется *протекание* между двумя наборами  $x$  и  $y$  клеток решетки.

1. Рассмотрим вероятность того, что *хотя бы одна* из жидкостей 1, 2, 3 протекает между центром  $O$  и границей решетки. Стремится ли эта вероятность к нулю с ростом  $n$ ?

*Протекание между сторонами  $x$  и  $y$  шестиугольника  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$*  — это протекание между наборами граничных клеток, для которых ближайшая сторона — это  $x$  и  $y$  соответственно (считаем, что ближайшая сторона определена однозначно). Рассмотрим вероятность того, что для *каждого*  $k = 1, 2, 3$  жидкость  $k$  протекает между противоположными сторонами  $A_kA_{k+1}$  и  $A_{k+3}A_{k+4}$  (считаем  $A_7 = A_1$ ). Ее предел при  $n \rightarrow \infty$  (если существует) назовем *вероятностью тройного протекания*.

2. Равна ли нулю вероятность тройного протекания? Существует ли указанный предел?

*События  $X_n, Y_n, Z_n$  становятся независимыми с ростом  $n$* , если  $P(X_n \cap Y_n \cap Z_n) - P(X_n)P(Y_n)P(Z_n) \rightarrow 0$ , где  $P(X_n \cap Y_n \cap Z_n)$  — вероятность одновременного наступления этих событий, а  $P(X_n), P(Y_n), P(Z_n)$  — вероятности их наступления по отдельности.

3. Пусть событие  $X_n^k$  — протекание жидкости  $k$  между противоположными сторонами  $A_kA_{k+1}$  и  $A_{k+3}A_{k+4}$ . Становятся ли  $X_n^1, X_n^2, X_n^3$  независимыми с ростом  $n$ ?

4. Найдите вероятность тройного протекания.

5. Решите аналоги предыдущих задач, если шестиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  заменяется на многоугольник с 6 отмеченными точками  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  на границе.

6. Верно ли, что если два многоугольника с 6 отмеченными точками на границе совмещаются конформным отображением, то вероятности тройного протекания для них равны?

Пусть теперь вместо шестиугольника дан правильный треугольник  $A_1A_2A_3$  со стороной 1 и центром в клетке  $O$ . Рассмотрим все клетки, из которых жидкость 1 протекает до стороны  $A_2A_3$ . Они образуют несколько многоугольников, возможно, с несколькими “дырками”. Пусть событие  $X_n$  состоит в том, что  $O$  находится внутри одного из многоугольников (в том числе, возможно, внутри одной из “дырок”). Аналогично определим  $Y_n$  и  $Z_n$ . Предел вероятности одновременного наступления событий  $X_n, Y_n, Z_n$  при  $n \rightarrow \infty$  (если существует) назовем *вероятностью тройного окружения*.

7. Решите аналоги предыдущих задач для тройного окружения вместо протекания.

8. Сформулируйте и решите аналоги предыдущих задач для 8 цветов вместо 4.

### 3. Открытые проблемы: законы сохранения

Цель этих задач — проверить, какие из законов сохранения, установленных в 2017 году для *классической* дискретной теории поля [2], выполняются для *квантовой* теории.

9. Вернемся к игрушечной модели из §1. Пусть на каждой дороге  $AB$  задано комплексное число  $j(AB)$ , называемое *силой тока*. Для данного набора курсов обмена  $U$  обозначим

$$S'[U] := -\operatorname{Re} \left( \sum_{ABCD} U(ABCD) + \sum_{AB} U(BA)j(AB) \right).$$

Курсы обмена теперь будут случайными комплексными числами, равными 1 по модулю. А именно, плотность вероятности набора курсов  $U$  равна

$$P[U] := e^{-S'[U]}/Z,$$

где постоянная  $Z$  выбирается так, чтобы полная вероятность равнялась 1.

Пусть  $O$  — любой неграничный город, а  $E, N, W, S$  — его соседи справа, сверху, слева и снизу соответственно. Верно ли, что мнимая часть математического ожидания случайной величины

$$j(OE)U(EO) + j(ON)U(NO) - U(OW)j(WO) - U(OS)j(SO)$$

равна 0? (Это означало бы *сохранение заряда*: например, если все курсы обмена единичные, то рассматриваемая величина равна разности между втекающими и вытекающими из узла  $O$  токами.)

10. То же самое, если курсы обмена — унитарные матрицы размера  $n \times n$ , силы токов — произвольные комплексные матрицы  $n \times n$ , величина  $S'[U]$  заменяется на

$$S''[U] := -\operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left( \sum_{ABCD} U(ABCD) + \sum_{AB} U(BA)j(AB) \right),$$

а мнимая часть заменяется на ортогональную проекцию на подпространство косозермитовых матриц.

11. *Связь симметрий с законами сохранения*. Пусть  $L(x, y)$  — дифференцируемая функция  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассмотрим случайный вектор  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  с плотностью вероятности

$$P(x_1, \dots, x_N) := \exp \left( - \sum_{t=1}^{N+1} L(x_t, x_t - x_{t-1}) \right) / Z,$$

где мы полагаем  $x_0 = 0$ ,  $x_{N+1} = 1$ , а постоянная  $Z$  выбирается так, чтобы полная вероятность равнялась 1. Пусть нашлись такие функции  $s_1(x_1, \dots, x_N), \dots, s_N(x_1, \dots, x_N)$ , что

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x_t + \lambda s_t, x_t - x_{t-1} + \lambda(s_t - s_{t-1})) \right|_{\lambda=0} = 0$$

для любых  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$  и  $2 \leq t \leq N$ . Верно ли, что математическое ожидание случайной величины

$$s_{t-1}(x_1, \dots, x_N) \frac{\partial L}{\partial y}(x_t, x_t - x_{t-1})$$

не зависит от  $t$ ?

**Публикации студентов.** Аналог задачи 9 для *действия Виллена* на дереве решен в [1].

[1] М. Федоров, Conservation laws in quantum field theory on graphs, submitted, 2018.

[2] М. Скопенков, Discrete field theory: symmetries and conservation laws, submitted, 2017. [arXiv:1709.04788](https://arxiv.org/abs/1709.04788)

**Открытый Вопрос.** Какие многоугольники можно сложить из подобных друг другу прямоугольников с данным отношением сторон  $x$ ?

## 4. Стартовые упражнения

— У меня есть мысль! — сказал удав, открывая глаза. — Мысль. И я её думаю.  
— Какая мысль? — спросила мартышка.

— Так сразу не скажешь...

— Ух ты! — подпрыгнула мартышка. — Ох, какая хорошая мысль. А можно я её тоже немножко подумаю?  
Г. Остер, “Бабушка удава”

1. Сложите квадрат из нескольких прямоугольников  $m \times n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа.
2. Дизайнеру заказали рамы для квадратного окна. На проектах (рисунки А, В) показано, как должны примыкать стекла друг к другу, и как они должны быть ориентированы (короткой или длинной стороной вверх). Можно ли сделать все стекла в каждой раме подобными прямоугольниками?
3. Можно ли разрезать квадрат на 3 подобных, но неравных прямоугольника?
4. Можно ли разрезать квадрат на 5 квадратов?
5. Все полки у шкафа на рисунке С, как и все лоскутки, из которых сшито одеяло на рисунке D — квадратные. Являются ли квадратными сами шкаф и одеяло?
6. Можно ли замостить всю плоскость попарно различными квадратами, длины сторон которых — целые числа?



А



В



С



D

7. Можно ли квадрат разрезать на прямоугольники с отношением сторон  $2 + \sqrt{2}$ ?
8. Является ли  $1 + \sqrt{2}$  суммой квадратов чисел вида  $a + b\sqrt{2}$ , где  $a$  и  $b$  — рациональны?

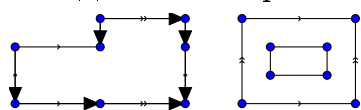
Пусть на прямоугольном листе бумаги нарисовано разбиение на прямоугольники. Разрешается разрезать лист вдоль любого отрезка на два прямоугольника, потом произвести такие операции по-отдельности с каждой из получившихся частей, и так далее. Если таким образом можно реализовать исходное разбиение, то назовем его *тривиальным*. Например, разбиения на рисунках А, В — тривиальные, а С, D — нет.

Следующие 4 упражнения предлагается решить *только для тривиальных* разбиений.

9. Какие прямоугольники можно разрезать на прямоугольники со стороной 1?
10. Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты?
11. Можно ли квадрат разрезать на прямоугольники с отношением сторон  $\sqrt{2}$ ?
12. Все числа, которые можно представить в виде  $x = a + b\sqrt{2}$  с рациональными  $a$  и  $b$ , назовем *хорошими*. При каких хороших  $x$  квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон  $x$ ?

## 5. Открытые проблемы о замощениях с физической интерпретацией

1. Дан конверт в форме прямоугольника  $a \times b$ . При каких вещественных  $a$  и  $b$  его можно оклеить квадратными марками без просветов и наложений с обеих сторон? Квадраты разрешается перегибать через край прямоугольника, их размеры могут различаться.
2. Поверхности каких равногранных тетраэдров можно оклеить квадратами без просветов и наложений? А каких — правильными треугольниками?
3. Поверхности каких многогранников можно оклеить квадратами без просветов и наложений? А каких — правильными треугольниками?
4. Некоторые пары сторон многоугольника на рисунке (слева или справа) склеены. При каких длинах сторон полученную поверхность можно разрезать на квадраты?



5. Существует ли многоугольник, который можно разрезать на квадраты, но нельзя *тривиально* разрезать на квадраты (определение дано в §4, см. версию на сайте)?
6. Какие многоугольники разрезаются на прямоугольники с данным отношением сторон  $x$ ? А какие — на прямоугольники с данными отношениями сторон  $x_1, \dots, x_n$ ?
7. Какие многоугольники разрезаются на правильные треугольники? А какие — на ромбы с углом  $60^\circ$ ?
8. Существует ли центрально-симметричный многоугольник, который можно разрезать на правильные треугольники, но нельзя разрезать на ромбы с углом  $60^\circ$ ?
9. Какие многоугольники можно разрезать на трапеции, гомотетичные данной?
10. Когда из параллелепипедов, подобных данному, можно составить куб?

**Публикации студентов.** Задача 1 для случая *равных* квадратов решена в [5]. Задача 2 для *правильного* тетраэдра решена в [1]. Решение задачи 6 для разрезов *прямоугольника* и *хороших*  $x_1, \dots, x_n$  (определение дано в §4, см. версию на сайте) опубликовано в [9] и упрощено в [6]. Задачи 6 и 9 для частных случаев решены в [3, 4]. Элементарное введение в используемые методы дано в [10, 8, 7], вводные задачи — в [2].

- [1] Балакин А., Оклеивание тетраэдра квадратами, Математическое просвещение. Сер. 3., 2018, в печати.
- [2] Квадрат из подобных прямоугольников, 26-я летняя конференция международного математического Турнира городов, 2014, <http://www.turgor.ru/lktg/2014/3/index.htm>
- [3] Зверев И., Разрезания многоугольников на трапеции, подобные данной, представлено к публикации, 2017. [arXiv:1709.02773](https://arxiv.org/abs/1709.02773)
- [4] Новиков И., Разрезание на подобные прямоугольники многоугольников, составленных из равных прямоугольников, 2018.
- [5] Ожегов Ф., Оклеивание прямоугольника равными квадратами с обеих сторон, представлено к публикации, 2018.
- [6] Рябов П., Дополнение к результатам Ф. Шарова // Мат. просвещение. Сер. 3. 2018. Вып. 22 (весна). С. 165–170. [arXiv:1711.09406](https://arxiv.org/abs/1711.09406)
- [7] Скопенков М., Малиновская О., Дориченко С. Собери квадрат // Квант. 2015. N2. С. 6-11. [arXiv:1305.2598](https://arxiv.org/abs/1305.2598)
- [8] Скопенков М., Прасолов М., Дориченко С. Разрезания металлического прямоугольника // Квант. 2011. N3. С. 10-16. [arXiv:1011.3180](https://arxiv.org/abs/1011.3180)
- [9] Шаров Ф.А., Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон // Математическое просвещение. Сер. 3. 2016. Вып. 20. С. 200-214. [arXiv:1604.00316](https://arxiv.org/abs/1604.00316)
- [10] Шаров Ф.А.,  $x$ -площадь, представлено к публикации, 2017. [arXiv:1711.08503](https://arxiv.org/abs/1711.08503)

**Открытый Вопрос.** На каких поверхностях через каждую точку проходят 2 параболы с вертикальными осями?

## 6. Стартовые упражнения

Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — две прямые на плоскости,  $l$  — прямая, не параллельная ни одной из них. *Параллельным проектированием* прямой  $l_1$  на прямую  $l_2$  относительно направления  $l$  называют отображение, которое точке  $A$  прямой  $l_1$  ставит в соответствие точку пересечения прямой  $l_A$ , параллельной  $l$  и проходящей через  $A$ , с прямой  $l_2$ .

**11.** Любое ли параллельное проектирование прямой на прямую сохраняет длины отрезков?

*Простым отношением* упорядоченной тройки точек  $A, B, C$  на прямой ( $B \neq C$ ) называется такое число  $x$ , что  $\overrightarrow{AC} = x \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**12.** а) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой равно  $x$ . Найдите простые отношения этих точек, записанных во всех других порядках.

б) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой сохраняется при параллельном проектировании.

**13.** а) Композицией нескольких параллельных проектирований прямой можно перевести любые две различные точки в любые другие две различные точки.

б) Верно ли аналогичное утверждение для двух троек точек на прямой?

с) Дайте определение параллельного проектирования одной плоскости в пространстве на другую.

д) Композицией нескольких параллельных проектирований плоскости можно перевести любой треугольник в любой другой.

е) Верно ли аналогичное утверждение для двух четырехугольников?

**14.** а) Каждая сторона треугольника поделена на три равные части, и точки деления соединены с противоположными вершинами. Докажите, что диагонали “внутреннего” 6-угольника пересекаются в одной точке.

б) В каком отношении делит основания трапеции прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон?

с) Даны две параллельные прямые и точки  $A, B$  на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка  $AB$ .

**15.** Пусть непрерывная биекция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  середину любого отрезка переводит в середину его образа, а точки 0 и 1 оставляет на месте. Тогда для всех  $x, y \in \mathbb{R}$  и  $m, n \in \mathbb{Z}$ , а)  $f(2x) = 2f(x)$ ; б)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ; с)  $f(m/n) = m/n$ ; д)  $f(x) = x$ .

---

**Задача Дня.** *Основная теорема аффинной геометрии (Мёбиус–фон Штаудт).* Любое непрерывное взаимно-однозначное отображение плоскости, переводящее прямые в прямые, является композицией параллельных проектирований.

---

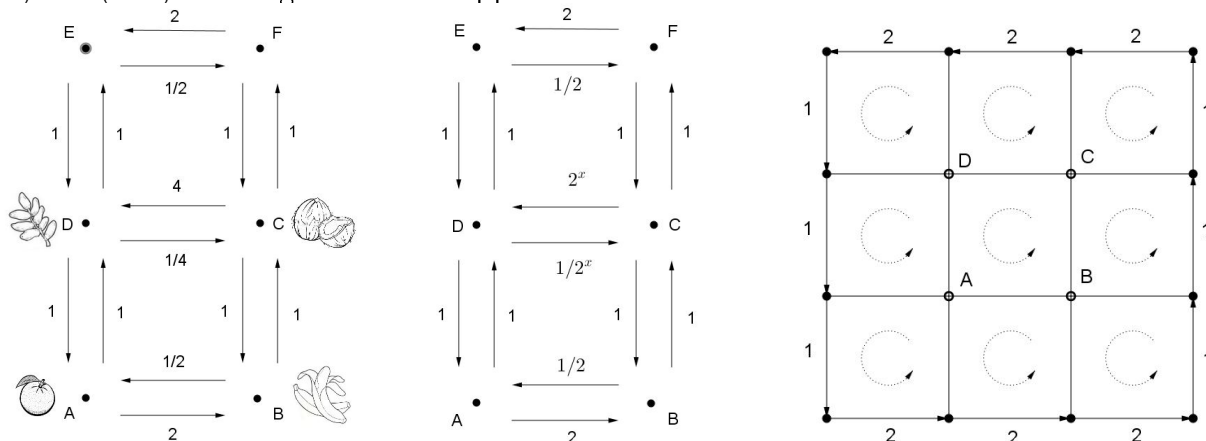


# Direction I. Discrete field theory

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

## 3. Leading exercises: toy model of gauge theory

Several cities are connected by roads in the shape of an  $M \times N$  grid; see the figure. Each city has its own type of goods (in unlimited quantity). E.g., city  $A$  has apples and city  $B$  has bananas. For two neighboring cities  $A$  and  $B$  an exchange rate  $U(AB) > 0$  is fixed, e.g., 2 bananas for an apple. The rate is symmetric, i.e.,  $U(BA) = U(AB)^{-1}$ : one gets back an apple for 2 bananas.



A cunning citizen can travel and exchange along a  $1 \times 1$  square  $ABCD$  to multiply his initial amount of goods by a factor of  $U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$ . E.g., in the figure to the left the factor is  $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 8$ . Denote  $U(ABCD) := U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$ .

In particular, a trip along the square  $ABCD$  gives profit in one of the directions, if  $\log_2 U(ABCD) \neq 0$ . The *total speculation profit* is measured by the sum  $S[U]$  of the values  $\log_2^2 U(ABCD)$  over all  $1 \times 1$  squares  $ABCD$  (say, bypassed counterclockwise). E.g., in the figure to the left

$$S[U] = \log_2^2 U(ABCD) + \log_2^2 U(DCFE) = (\log_2 8)^2 + (\log_2 \frac{1}{2})^2 = 10.$$

You are the king, who can set exchange rates except those on the boundary of the grid. You set them to minimize the quantity  $S[U]$ . The resulting rates are called *optimal*.

1. Clean up the kingdom in the left figure, i.e., find the number  $x$  for which the total speculation profit in the middle figure is minimal.

Notice that the change of variables  $x(AB) := \log_2 U(AB)$  simplifies the expression for the profit a lot:

$$S[x] := \sum_{ABCD} (x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA))^2.$$

For each  $1 \times 1$  square  $ABCD$  denote  $x(ABCD) := x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA)$ . E.g., in the figure to the left,  $x(ABCD) = 3$ . Denote by  $W$  the factor multiplying the initial amount of goods for a counterclockwise travel around the whole boundary. E.g., in the figure to the left,  $W = 4$ .

2. Assume that the fixed rates at the boundary are as in the figure, i.e.,

$$U(AB) = \begin{cases} 2, & \text{if } AB \text{ is on the southern or northern border of the grid} \\ & \text{and is directed counterclockwise along the boundary;} \\ 1, & \text{if } AB \text{ is on the eastern or western border of the grid.} \end{cases}$$

Clean up the kingdom for the following particular grid sizes, i.e., complete the table:

Grid	$1 \times 2$	$1 \times 3$	$1 \times N$	$2 \times 2$
The value $W$	4			
The minimal value for $S[U]$				
Optimal rates $U(AB)$ for all roads $AB$				
Values $x(AB)$ for all roads $AB$				
Values $x(ABCD)$ for all $1 \times 1$ squares				

3. a) For which values of the boundary rates in an  $M \times N$  grid one can achieve  $S[U] = 0$ ?

b) For which values of  $M$  and  $N$  the optimal rates are uniquely determined by the boundary rates?

c) How  $M$ ,  $N$ ,  $W$  and the minimal speculation profit are related?

d) Which of the grids —  $8 \times 8$  or  $7 \times 9$  — has smaller speculation profit, if  $W$  is the same?

# Direction II. Visual potential theory and tilings

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

**Open question.** Which polygons can be tiled by rectangles of given side ratio  $x$ ?

## 4. Leading exercises

— *I have a thought!* — said Boa and opened his eyes. — *A thought. And I think it.*  
— *Which thought?* — asked Monkey.  
— *It takes time to explain...*  
— *Wow!* — jumped Monkey. — *What a good thought! May I also think it a bit?*  
G. Oster, “Boa’s grandmother”

1. Form a square from rectangles  $m \times n$ , where  $m$  and  $n$  are integers.
2. A designer was offered to make square window frames. In Figures A,B it is shown how the panes should be adjacent to each other and how they should be oriented (with the short side or with the long one to the top). Can all panes in each frame be similar rectangles?
3. Is it possible to dissect a square into 3 similar, but not equal rectangles?
4. Is it possible to dissect a square into 5 squares?
5. All shelves in Figure C, and all scraps, from which consists the piecework in Figure D, are squares. Are the board and the piecework also squares?
6. Is it possible to tile the plane by pairwise distinct squares with integer sides?



A



B



C



D

7. Is it possible to dissect a square into rectangles of side ratio  $2 + \sqrt{2}$ ?
8. Is  $1 + \sqrt{2}$  a sum of squares of numbers of the form  $a + b\sqrt{2}$ , where  $a$  and  $b$  are rational?

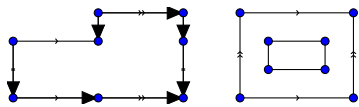
A tiling by rectangles is drawn on a rectangular sheet of paper. One may cut the sheet of paper along any straight line segment into two rectangles, then repeat the same operation separately for each of the obtained parts, and so forth. If it is possible to represent the initial tiling in this way, then the tiling is called *trivial*. For instance, the tilings shown in Figure A,B are trivial, but those in Figure C,D are not.

It is suggested that you solve the following 4 exercises only for trivial tilings.

9. Which rectangles can be tiled by rectangles with one of the sides equal to 1?
10. Which rectangles can be dissected into squares?
11. Is it possible to dissect a square into rectangles of side ratio  $\sqrt{2}$ ?
12. All numbers, which can be represented in the form  $x = a + b\sqrt{2}$  with rational  $a$  and  $b$ , are called *good*. For which good  $x$  a square may be tiled by rectangles of side ratio  $x$ ?

## 5. Open tiling problems with networks interpretation

1. An envelope has the shape of a rectangle  $a \times b$ . For which real  $a$  and  $b$  it can be completely covered by nonoverlapping square marks from both sides? It is allowed to fold the squares across the edges of the envelope, and the sizes of the squares may be different.
2. Which tetrahedra having four equal faces and made of paper can be dissected into squares? And into regular triangles?
3. Which polytopes made of paper can be dissected into squares? And into regular triangles?
4. Some pairs of sides of the polygon in the figure (to the left or to the right) are glued. For which side lengths the resulting surface can be tiled by squares?



5. Is there a polygon which can be tiled by squares but cannot be trivially tiled by squares (see the definition in §4)?
6. Which polygons can be tiled by rectangles of given side ratio  $x$ ? And by rectangles of given side ratios  $x_1, \dots, x_n$ ?
7. Which polygons can be tiled by regular triangles? And by rhombi with a  $60^\circ$  angle?
8. Is there a centrally-symmetric polygon which can be tiled by regular triangles but cannot be tiled by rhombi with a  $60^\circ$  angle?
9. Which polygons can be tiled by trapezoids homothetic to a given one?
10. When a cube can be tiled by parallelipipeds similar to a given one?

**Publications of students.** Problem 1 for *equal* squares is solved in [3]. Problem 2 for a *regular* tetrahedron is solved in [1]. A solution of Problem 6 for tilings of a *rectangle* and *good*  $x_1, \dots, x_n$  (see the definition in §4) is published in [5] and later simplified in [4]. Problems 6 and 9 are solved [10, 2] in some particular cases. Elementary introduction to the methodology is given in [6, 8, 7], introductory problems are in [9].

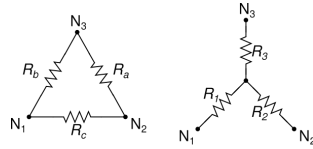
- [1] A. Balakin, Covering a tetrahedron by squares, Mat. Prosveschenie 3rd ser. (2018), to appear (in Russian).
- [2] I. Novikov, Tiling polygons composed of equal rectangles into similar rectangles, submitted, 2018 (in Russian).
- [3] F. Ozhegov, Covering of a rectangle by equal squares from both sides, submitted, 2018 (in Russian).
- [4] P. Ryabov, A complement to the results by F. Sharov, Mat. Prosveschenie 3rd ser. **22** (Spring) (2018), 165–170. [arXiv:1711.09406](https://arxiv.org/abs/1711.09406)
- [5] F. Sharov, Dissection of a rectangle into rectangles with given side ratios, Mat. Prosveschenie 3rd ser. **20** (2016), 200–214 (in Russian) [arXiv:1604.00316](https://arxiv.org/abs/1604.00316) (in English and in Russian).
- [6] F. Sharov, x-area, submitted, 2017 (in Russian). [arXiv:1711.08503](https://arxiv.org/abs/1711.08503)
- [7] M. Skopenkov, O. Malinovskaya, S. Dorichenko, Compose a square, Kvant 2 (2015), 6-11 (in Russian). [arXiv:1305.2598](https://arxiv.org/abs/1305.2598)
- [8] M. Skopenkov, M. Prasolov, S. Dorichenko, Dissections of a metal rectangle, Kvant 3 (2011), 10-16 (in Russian). [arXiv:1011.3180](https://arxiv.org/abs/1011.3180)
- [9] A square from similar rectangles, 26th summer conference of International mathematical Tournament of towns, 2014 (in English and in Russian), <http://www.turgor.ru/lktg/2014/3/index.htm>
- [10] I. Zverev, Dissections of polygons into similar trapezoids, submitted, 2017 (in Russian). [arXiv:1709.02773](https://arxiv.org/abs/1709.02773)

## 6. Inverse problem for alternating-current networks

<sup>1</sup>An *alternating-current* network is a (not necessarily planar) graph with a fixed subset of vertices (*boundary vertices*) and a complex number  $c(xy)$  with positive real part (*conductance*) assigned to each edge  $xy$  [2, Section 2.4]. The *voltage* is any complex-valued function  $v(x)$  on the set of vertices such that for each nonboundary vertex  $y$  we have  $\sum_{xy} c(xy)(v(x) - v(y)) = 0$ , where the sum is over all the edges containing the vertex  $y$ . One can see that the voltage is uniquely determined by its boundary values [2, Section 5.1]. The *current flowing into the network* through a boundary vertex  $y$  is  $i(y) := \sum_{xy} c(xy)(v(x) - v(y))$ . The *network response* is the matrix of the linear map taking the vector of voltages at the boundary vertices to the vector of currents flowing into the network through the boundary vertices.

The general *electrical-impedance tomography* problem is to reconstruct the network from its response. For direct-current planar networks, meaning that all the conductances are positive, the problem has been solved in [1].

**Teaser.** There is a matrix realizable as the response of the network in the figure to the right (for the boundary vertices  $N_1, N_2, N_3$  and some edge conductances  $R_1, R_2, R_3$ ) but not to the left.



Denote by  $\Psi_b$  the set of complex  $b \times b$  matrices  $\Lambda$  having the following 4 properties:

- (1)  $\Lambda$  is symmetric;
- (2) the sum of the entries of  $\Lambda$  in each row is zero;
- (3)  $\text{Re}\Lambda$  is non-negatively definite;
- (4) if  $U = (U_1, \dots, U_b) \in \mathbb{R}^b$  and  $U^T(\text{Re}\Lambda)U = 0$  then  $U_1 = \dots = U_b$ .

**11.** Prove that the set of responses of all the possible connected alternating-current networks with  $b$  boundary vertices is the set  $\Psi_b$ .

It is known that Conditions (1–4) are necessary. Sufficiency is known for  $b = 2$  and  $b = 3$  [2, Theorem 4.7]. For general  $b$  there is a solution by G. Rote (private communication).

**12.** Given a response matrix provide an algorithm to reconstruct the network and the edge conductances.

**13.** Describe the set of all the responses of all the possible *series-parallel* networks with edge conductances having positive real parts.

**14.** Describe the set of all the responses of all the possible *planar* networks with edge conductances having positive real parts.

**15.** Let the conductance of each edge be either  $\omega$  or  $1/\omega$ , where  $\omega$  is a variable. Describe the set of all the possible responses of such networks as functions in  $\omega$ .

This is known for  $b = 2$  boundary vertices — Foster’s reactance theorem [2, Theorem 2.5].

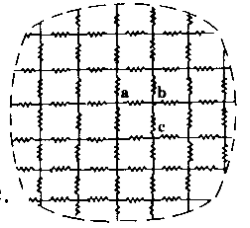
[1] E. B. Curtis and J. A. Morrow, *Inverse problems for electrical networks*, Series on Appl. Math. **13**, World Scientific, Singapore, 2000.

[2] M. Prasolov and M. Skopenkov, Tilings by rectangles and alternating current, *J. Combin. Theory A* **118:3** (2011), 920–937, <http://arxiv.org/abs/1002.1356>.

## 7. Asymptotic estimates for conductance

The *Green function*  $R(x, y)$  is the resistance between the origin and the vertex  $(x, y)$  in a infinite square lattice of unit resistors.

**Teaser.**  $R(0, 1) = 1/2$ ,  $R(1, 1) = 2/\pi$ , and  $R(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln(x^2 + y^2) + O(1)$ .



The same asymptotic form holds for triangular and hexagonal lattices.

**16.** Prove the same for arbitrary *nondegenerate uniform orthogonal* lattice.

**17.** Discrete harmonic functions on orthogonal lattices are Lipschitz, i.e.,  $|u(z) - u(w)| = O(|z - w|)$ .

**18.** Generalize *star-triangle transformation* to nonrhombic lattices.

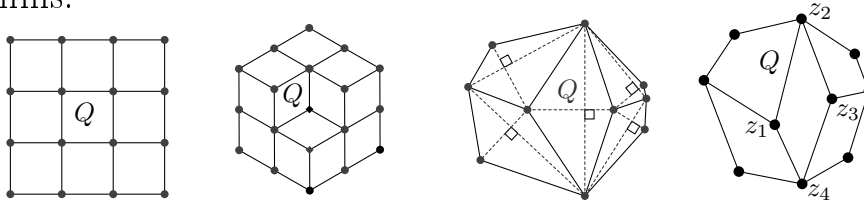
## 8. Convergence of discrete analytic functions to their continuous counterparts

A *quadrilateral lattice* is a finite graph  $Q \subset \mathbb{C}$  with rectilinear edges such that each bounded face is a quadrilateral. A complex-valued function  $f$  on the vertices of  $Q$  is called *discrete analytic*, if for each quadrilateral face  $z_1 z_2 z_3 z_4$  we have

$$\frac{f(z_1) - f(z_3)}{z_1 - z_3} = \frac{f(z_2) - f(z_4)}{z_2 - z_4}.$$

The real part of a discrete analytic function is called a *discrete harmonic function*. The *discrete Dirichlet problem* is to find a discrete harmonic function with given values at the boundary. A function  $u$  is *equicontinuous*, if  $|u(z) - u(w)| = O(\phi(|z - w|))$  for some function  $\phi(x)$  such that  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$ .

**Teaser.** The function  $f(z) = z$  is discrete analytic but  $f(z) = z^2$  is not unless the faces of  $Q$  are parallelograms.



**19.** Is it true that discrete harmonic functions are equicontinuous?

**20.** Is it true that the solution of the Dirichlet problem converges to its continuous counterpart under lattice refinement?

# Open problems in geometry and potential theory

## Direction III. Visual geometry for architecture

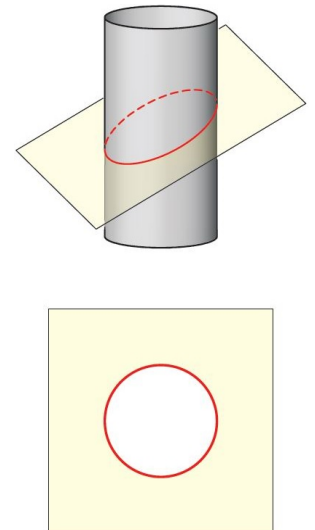
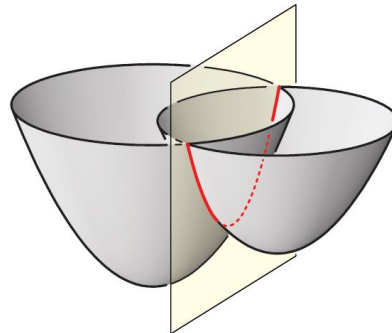
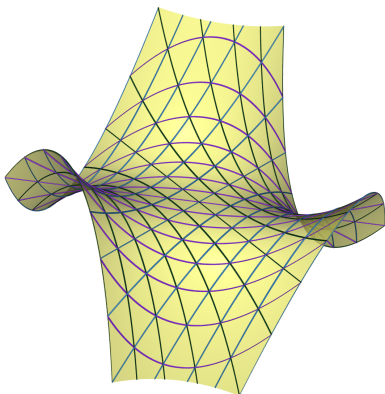
Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

This is a collection of visual open problems in geometry. The statements of most problems are elementary and use only a few definitions given in the text. But their solution leads to important ideas of modern mathematics. Each individual problem with a number is a topic for a one-year term work. The problems are suitable at any education term.

### 9. Surfaces containing two parabolas through each point

**21.** Find all functions  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  with the following property: through each point of the plane one can draw two lines such that the restriction of the function  $f$  to each of the lines are quadratic functions.

*Example.* The surfaces given by the equations  $z = xy(x + y)$  (left figure) or  $z = x^2 + y^2$  (middle figure)



An *isotropic circle* is either a parabola with the axis parallel to  $Oz$  (middle figure) or an ellipse whose projection into the plane  $Oxy$  is a circle (right figure).

**22.** Find all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  containing a line and an isotropic circle through each point.

**23.** Find all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  containing two isotropic circles through each point.

**24.** Which sets of circles can be the top view of the isotropic circles on such surfaces?

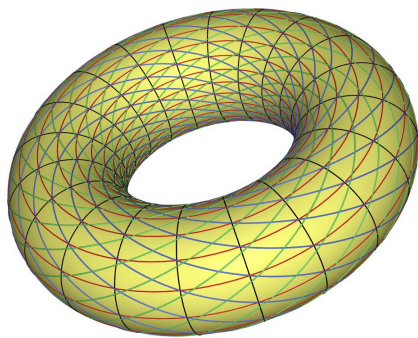
**25.** Find all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  enveloped by two families of cones of revolution.

*Hint.* Use isotropic model of Laguerre geometry [7, §2].

**26.** Find all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  containing 3 isotropic circles through each point. Find all hexagonal webs from isotropic circles on surfaces (except isotropic spheres).

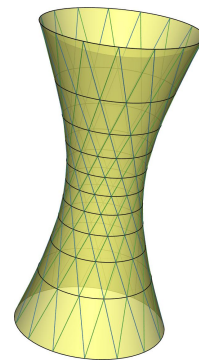
## 10. Surfaces containing two circles through each point

Torus



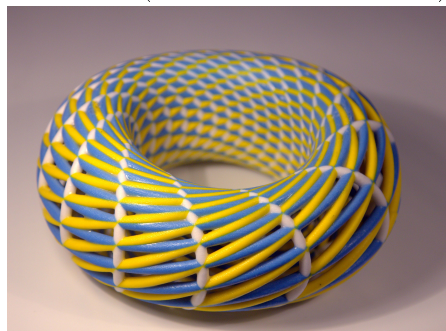
Translation of a circle along another one

Hyperboloid



Cyclide (a degree 4 surface)

Clifford translational surface (a degree 8 surface)



**27.** Let  $r$  and  $R$  be fixed. Find all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  such that through each point of the surface one can draw two circles of radii  $r$  and  $R$  fully contained in the surface.

**28.** Let  $\alpha$  be fixed. Find all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  such that through each point of the surface one can draw two circles fully contained in the surface and intersecting at angle  $\alpha$ .

**29.** Let  $\alpha$  be fixed. Find all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  such that through each point of the surface one can draw two circles fully contained in the surface, the planes of which intersect at angle  $\alpha$ .

*Hint.* Deduce from the classification of surfaces in  $\mathbb{R}^3$  containing 2 circles through each point.

The surface  $\Phi(u, v) = (u + i)(v + j)^{-1}$  in  $\mathbb{R}^4$ , where  $i$  and  $j$  are quaternion units, contains a line and a circle through each point but it not a quadric, cf. [4].

**30.** Find all surfaces in  $\mathbb{R}^4$  containing a line and a circle through each point.

**31.** Consider the surface in  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  parametrized as

$$\Phi(s, t) = (a_0st + a_1s + a_2t + a_3)(b_0st + b_1s + b_2t + b_3)^{-1},$$

where  $a_i, b_i \in \mathbb{H}$  are fixed, and  $s, t \in \mathbb{R}$  are variables. How many circles can the surface contain through each point?

*Hint.* The surface contains at least 2 circles through each point. Consider the stereographic preimage of the surface.

- what degree does it have (cf. [2])?
- is it always the intersection of the unit sphere in  $\mathbb{R}^5$  with two other quadrics?
- what is the configuration of the planes of the circles on it (cf. [5])?

**32.** Does each surface in  $\mathbb{R}^4$  containing 3 circles through each point belong to this class of surfaces (cf. [3])?

- [1] Dietz, R., Hoschek, J., Jüttler, B., An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics, *Comp. Aided Geom. Design*, 10:3(1993), 211-229.
- [2] R. Krasauskas, S. Zube, Bezier-like parametrizations of spheres and cyclides using geometric algebra. In: K. Guerlebeck (Ed.), *Proceedings of 9th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Weimar, Germany, 2011.
- [3] N. Lubbes, [Families of circles on surfaces](#), arXiv:1302.6710, preprint.
- [4] F. Nilov, M. Skopenkov, [A surface containing a line and a circle through each point is a quadric](#), *Geom. Dedicata* 163:1 (2013), 301-310.
- [5] H. Pottmann, L. Shi, M. Skopenkov, [Darboux cyclides and webs from circles](#), *Comput. Aided Geom. D.* 29:1 (2012), 77–97.
- [6] J.Schicho, The multiple conical surfaces, *Contrib. Algeb. Geom.* **42:1** (2001), 71–87.
- [7] M. Skopenkov, H. Pottmann, Ph. Grohs, [Ruled Laguerre minimal surfaces](#), *Math. Z.* 272 (2012), 645–674.