Семинар 1.

Задача 1. При каких $\varepsilon \in \mathbb{R}$ векторы $v_1 = (1,2,3),\ v_2 = (2,5,7),\ v_3 = (3,7,10+\varepsilon)$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$?

Задача 2. Образуют ли векторы $v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (-1,1,-1,1),\ v_3 = (1,-1,-1,1),\ v_4 = (-1,-1,1,1)$ базис в $\mathbb{R}^4$?

Задача 3. Являются ли линейно зависимыми над $\mathbb{R}$ следующие многочлены: $(x-1)(x-2),\ (x-3)(x-2),\ (x-1)(x-3)$?

Задача 4. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является бесконечномерным векторным пространством над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Рассмотрим в этом пространстве линейную оболочку чисел 1 и $\sqrt{3}$. Лежит ли в этой оболочке число $3^{\frac{1}{4}}$? Число $\sqrt{7}$?

Задача 5. Докажите, что в пространстве многочленов от одной переменной над данным полем K всякое конечное число многочленов различных степеней, не содержащее нулевой многочлен, линейно независимо.

Задача 6. Докажите, что из каждой конечной системы векторов, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, можно выбрать эквивалентную ей линейно независимую подсистему. (Две конечные системы векторов называются *эквивалентными*, если совпадают их линейные оболочки. *Линейной оболочкой* конечной системы векторов называется множество всех линейных комбинаций векторов этой системы.)

Задача 7. Докажите, что две эквивалентные конечные линейно независимые системы векторов содержат одинаковое число векторов.

Задача 8. В векторном пространстве V над полем K даны линейно независимые векторы v_1, v_2, v_3 и ненулевые скаляры $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in K$. Какому условию должны удовлетворять эти скаляры, чтобы векторы $v_1 + \lambda_1 v_2, v_2 + \lambda_2 v_3$ и $v_3 + \lambda_3 v_1$ были линейно зависимы?

Задача 9. Является ли множество
a) $V = \{x = (x_1, x_2, ...)|\ x_i \in \mathbb{R}\}$ всех вещественных последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр векторным пространством?
b) $V = \{x = (x_1, x_2, ...)|\ x_i \in \mathbb{R},\ \exists\ M > 0,\ \forall i\ |x_i| < M\}$ всех вещественных ограниченных последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр векторным пространством?

Задача 10. Является ли векторным пространством над полем $\mathbb{C}$ множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с комплексными коэффициентами, для которых $x^n f(\frac{1}{x}) = f(x)$?