Подробная программа по курсу геометрии для 1 курса бакалавриата, 2018-2019 учебный год, 1 семестр. Лектор А.С.Тихомиров

1. Векторные пространства. Определение, примеры: пространство классов направленных отрезков как векторное пространство над $\mathbb{R}$, арифметическое векторное пространство, поле как векторное пространство над своим подполем. Линейная зависимость и независимость систем векторов, линейная оболочка. Базис и размерность векторного пространства, теорема о независимости числа векторов базиса от выбора базиса в пространстве. Размерность векторного пространства. Примеры векторных пространств, в которых нет базиса (пространство вещественнозначных функций на отрезке и другие). Координаты векторов в данном базисе. Подпространства векторного пространства. Продолжение базиса подпространства до базиса объемлющего пространства в конечномерном случае. Неравенство, связывающее размерность пересечения подпространств в конечномерном векторном пространстве с их размерностями.

2. Линейные отображения векторных пространств. Ядро и образ линейного отображения. Изоморфизм векторных пространств. Линейные операторы в векторных пространствах. Матричный формализм. Матрица линейного отображения конечномерных векторных пространств в заданных базисах. Матрица композиции линейных отображений. Преобразование матрицы линейного отображения при переходе к новым базисам. Изоморфизм кольца линейных операторов в конечномерном векторном пространстве с кольцом квадратных матриц над полем. Ранг линейного отображения, его связь с размерностью ядра и размерностью отображаемого пространства (в конечномерном случае), его совпадение с рангом матрицы этого отображения.

3. Системы линейных уравнений над полем. Метод Гаусса. Критерий Кронеккера-Капелли. Альтернатива Фредгольма. Правило Крамера. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Собственные и инвариантные подпространства линейного оператора. Характеристическое уравнение. Нахождение собственного подпространства через решение системы линейных уравнений. Примеры. Диагонализируемые линейные операторы. Критерий диагонализируемости линейного оператора: сумма размерностей собственных продпространств линейного оператора равна размерности пространства.

4. Двойственное векторное пространство к данному пространству. Аннуляторы. Построение по базису в конечномерном пространстве двойственного к нему базиса в двойственном пространстве. Канонический гомоморфизм векторного пространства в дважды двойственное к нему пространство. Теорема: в конечномерном случае канонический гомоморфизм является изоморфизмом векторных пространств (принцип двойственности). Двойственное линейное отображение. Двойственный (сопряженный) линейный оператор.

5. Евклидовы векторные пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Примеры: стандартное скалярное произведение в конечномерном арифметическом вещественном пространстве; L_2-скалярное произведение в пространстве непрерывных вещественнозначных функций на отрезке. Ортонормированные базисы. Длины векторов, углы между векторами, ортогональные проекции, евклидов объём. Векторное и смешанное произведения в ориентированном 3-мерном вещественном пространстве. Запись смешанного произведения векторов в виде определителя 3 порядка от координат векторов в ортонормированном базисе, его геометрическая интерпретация как ориентированного объема.

6. Процессе ортогонализации Грама-Шмидта для конечных наборов векторов в евклидовом векторном пространстве. Ортогональная прямая сумма подпространств евклидова пространства. Ортогональное дополнение к подпространству. Доказательство его существования для конечномерного подпространства, разложение в этом случае евклидова пространства в ортогональную прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Взаимность подпространства и его ортогонального дополнения в конечномерном случае. Ортогональные линейные операторы в евклидовом пространстве. Ортогональные матрицы. Приведение матрицы ортогонального оператора в конечномерном случае к стандартному виду. Собственные подпространства ортогонального оператора, их ортогональность для собственных чисел 1 и -1 ортогонального оператора. Разложение ортогонального оператора в композицию отражений и ортогональную сумму поворотов. Нормированные веще-

ственные векторные пространства. Примеры норм: евклидова норма и другие нормы в пространстве матриц и пространстве линейных отображений над $\mathbb{R}$. Эквивалентность норм.

7. Определители произвольного порядка. Симметрическая группа. Разложение перестановки в композицию инверсий как следствие ее разложения в композицию непересекающихся циклов. Зависимость четности числа инверсий в разложении перестановки в композицию инверсий только от самой перестановки, а не от конкретного разложения (доказательство дано через совпадение этой четности с четностью числа инверсных пар в перестановке). Знак перестановки. Полилинейная кососимметрическая форма n-го порядка на n-мерном векторном пространстве (форма объема). Определитель матрицы n-го порядка, столбцы которой составлены из координат арифметических векторов,как пример формы объема на n-мерном арифметическом векторном пространстве. Свойства определителя как формы: линейность по столбцам и обнуление при наличии двух равных столбцов; как следствие, его кососимметричность относительно перестановки столбцов или строк. Введение понятия ориентации для конечномерных вещественных векторных пространств через определители. Определители и обращение матриц линейных отображений. Полная линейная группа $GL(n)$ как группа невырожденных квадратных матриц n-го порядка и как группа обратимых линейных операторов.

8. Аффинные пространства. Определение аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ над данным векторным пространством V над полем $\mathbf{k}$. Примеры аффинных пространств: арифметическое (или координатное) аффинное пространство $\mathbf{k}^n$; евклидово точечное пространство E^n как аффинное пространство над евклидовым n-мерным векторным пространством; векторное пространство как аффинное пространство над самим собой. Определение аффинного подпространства $\Pi(U)$ с направляющим подпространством U в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$, где U - подпространство в V. Частные случаи: 1) $\dim U = 1$, $\Pi(U)$ - аффинная прямая в $\mathbb{A}^n$, и 2) $\dim U = 2$, $\Pi(U)$ - аффинная плоскость в $\mathbb{A}^n$. Множество решений неоднородной системы линейных уравнений с n неизвестными как аффинное подпространство в $\mathbf{k}^n$.

9. Понятие аффинного репера в конечномерном аффинном пространстве. Аффинные и барицентрические координаты точек в конечномерном аффинном пространстве относительно данного репера. Деление отрезка в данном отношении, формула для центроида полиэдра в аффинном пространстве в барицентрических координатах. Аффинные отображения конечномерных аффинных пространств как отображения, для которых ассоциированные отображения подлежащих векторных пространств линейны. Матрица аффинного отображения в фиксированных реперах, ее связь с матрицей подлежащего линейного отображения векторных пространств. Теорема: аффинное отображение однозначно определяется образом аффинного репера. Движения и подобия евклидовых аффинных пространств как аффинные отображения, их матрицы. Задание аффинного подпространства в конечномерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ системой неоднородных линейных уравнений в произвольной аффинной системе координат в $\mathbb{A}^n$.

10. Геометрия евклидовой аффинной плоскости и трехмерного евклидова аффинного пространства. Многомерное евклидово аффинное пространство E^n. Векторы в E^n (школьное определение), их скалярное произведение. Движения пространств E^n. Примеры движений пространств $E^1,\ E^2,\ E^3$: параллельные переносы, зеркальные симметрии, повороты, винтовые движения, скользящие и поворотные симметрии. Ориентация пространств $E^n,\ n \leqslant 3$. Движения первого и второго рода. Полная классификация движений евклидовых пространств $E^1,\ E^2,\ E^3$.

11. Квадратичные формы над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Приведение пары вещественных квадратичных форм, одна из которых положительно определена, к диагональному виду. Квадрики в аффинном и евклидовом пространствах. Классификация квадрик в вещественных и комплексных аффинных пространствах $\mathbb{A}^n,\ n \leqslant 3$, и в евклидовых пространствах $E^n,\ n \leqslant 3$. Приведение евклидовых квадрик к главным осям.

12. Выпуклые фигуры в R^n: опорные полупространства, грани и крайние точки. Выпуклые многогранники, лемма Фаркаша и теорема Минковского-Вейля.

Литература

1. А.Л.Городенцев. Геометрия. М., НИУ ВШЭ, 2016-17 уч. год.
2. А.Л.Городенцев. Алгебра-I. Учебник для студентов-математиков первого курса. М., ВШЭ, 2011.
3. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин. Линейная алгебра и геометрия. М., Наука, 1986.
4. И.Р.Шафаревич, А.О.Ремизов. Линейная алгебра и геометрия. Москва-Ижевск, 2014.

Дополнительная литература

5. М. Берже. Геометрия. Т. 1, 2. М.: Мир, 1974.
6. Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
7. В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров. Геометрия. М.: МЦНМО, 2013.

Формы контроля знаний студентов. Порядок формирования оценок

Прием задач из листка 1 - дедлайн 28.09.18.
Прием задач из листка 2 - дедлайн 19.10.18.
Прием задач из листка 3 - дедлайн 23.11.18.
Прием задач из листка 4 - дедлайн 21.12.18.

1-ая промежуточная контрольная работа (2 акад. часа) - на неделе 24.09.18-28.09.18.
Зачетная контрольная работа (3,5 астр. часа) - на неделе 22.10.18-26.10.18.
2-ая промежуточная контрольная работа (2 акад. часа) - на неделе 26.11.18-30.11.18.
Итоговая контрольная работа (4 астр. часа) - на неделе 24.12.18-28.12.18.

Формула итоговой оценки (по 10-балльной системе) =
$0{,}2\cdot 10\cdot(\frac{\text{общее число решенных задач из листков 1-4}}{\text{полное число задач в листках 1-4}})$
$+0{,}05\cdot$(оценка за 1-ую промежуточную контрольную работу)
$+0{,}2\cdot$(оценка за зачетную контрольную работу)
$+0{,}05\cdot$(оценка за 2-ую промежуточную контрольную работу)
$+0{,}5\cdot$(оценка за итоговую контрольную работу).

Студенты, желающие получить экзамен-автомат, должны сдать не менее 80 процентов задач из каждого листка (с вышеуказанными дедлайнами). При этом листки 3 и 4 сдаются *только* своему преподавателю-семинаристу. При сдаче этих листков преподаватель может задавать вопросы не только по сдаваемой задаче, но и на другие темы вокруг данной задачи.

А.С.Тихомиров