

Материалы занятий по курсу
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
совместный бакалавриат ВШЭ-ЦПМ
(2-й курс, 1-й семестр)

Раздел 1 «Элементарная комбинаторика»

М. Холл «Центральной задачей комбинаторики можно считать задачу размещения объектов в соответствии со специальными правилами и нахождения числа способов, которыми это может быть сделано».

Хочется сделать небольшое уточнение: «задачу размещения конечного числа объектов». Те задачи, где акцент делается именно на нахождении числа способов, иногда называют задачами перечислительной комбинаторики.

Лекция 1 Базовые задачи комбинаторики.

1. Основные операции с множествами: объединение, пересечение, дополнение одного множества до другого, симметрическая разность двух множеств, декартово произведение нескольких множеств, множество отображений из одного множества в другое $\text{Fun}(A, B)$.
2. Основная задача.
С помощью некоторой стандартной операции из нескольких конечных множеств получено новое. Как найти его порядок (число элементов), если известны порядки каждого из исходных множеств?
3. Порядок декартова произведения (правило произведения). Множество функций $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow A$, как декартова степень.
4. Сюръекции, инъекции и биекции. Подсчёт числа инъекций (размещения). Подсчёт числа биекций (перестановки).
5. Подсчёт подмножеств с фиксированным числом элементов. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты и их свойства. Перестановки с повторениями (два вывода) и полиномиальная теорема.
6. Разбиение одинаковых предметов по пронумерованным группам (задача о шарах и перегородках).
7. Формула включений-исключений, подсчёт числа сюръекций. Задача о смещениях (субфакториалы). Функция Эйлера.

Свойства биномиальных коэффициентов.

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

$$C_n^k = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^{k-1},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0,$$

$$C_{n+m}^k = C_n^k C_m^0 + C_n^{k-1} C_m^1 + C_n^{k-2} C_m^2 + \dots + C_n^0 C_m^k,$$

$$C_m^k C_n^m = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$$

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРИКИ

1. А) Сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров в m пронумерованных ящиков, так, чтобы не было ни одного пустого ящика.
Б) Сколькими способами можно сделать тоже самое так, чтобы в первом ящике лежало k шаров?
2. С помощью комбинаторных рассуждений найдите сумму (упростите выражение)
$$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n.$$
3. Докажите тождество $C_{n+m}^m = C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^{m-1} + \dots + C_{n-1}^0.$
4. Найдите сумму $C_{m+n-1}^{n-1} + C_{n+m-2}^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}.$
5. Найти сумму n первых треугольных чисел, n первых квадратов, n первых кубов.
6. Докажите, что число C_{2n}^n делится на $n+1$.
7. А) Найдите сумму $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots$
Б) Некоторое конечное множество содержит: ровно a_0 подмножеств, в которых число элементов делится на 3; ровно a_1 подмножеств, в которых число элементов при делении на 3 даёт в остатке 1; ровно a_2 подмножеств, в которых число элементов при делении на 3 даёт в остатке 2. Могут ли все три числа a_0, a_1, a_2 быть различными? Могут ли все три числа a_0, a_1, a_2 быть одинаковыми?
8. Докажите с помощью комбинаторных рассуждений равенство
$$C_n^0 C_n^m + C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m C_{n-m}^0 = 2^m C_n^m.$$
9. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове АБРАКАДАБРА?
10. Сколько различных слов, не содержащих четыре буквы Е подряд можно получить, переставляя буквы в слове ПЕРЕШЕЕК?
11. Сколько различных слов, не содержащих две буквы О подряд можно получить, переставляя буквы в слове ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ?
12. Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно получить, переставляя цифры 1, 2, 2, 3, 3.
13. Найдите сумму $\sum_{n=n_1+n_2+\dots+n_k} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$, где суммирование распространяется по всем упорядоченным разбиениям числа n на k слагаемых.
14. В множестве A зафиксирован набор подмножеств A_1, A_2, \dots, A_n . Разрешается брать пересечения и объединения имеющихся множеств, а также – их дополнения до множества A . Какое наибольшее число подмножеств множества A можно получить таким способом?
15. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "тартар" так, чтобы нашлись две одинаковые буквы, стоящие рядом?
16. Сколько существует различных натуральных чисел, меньших миллиона, в запись которых входит каждая из цифр 1, 2, 3, 4?
17. Обозначим через E_n число перестановок, в которых никакие два последовательных числа не идут друг за другом (большее за меньшим). Найдите формулу для величины E_n .
18. Автобусный билет представляет собой произвольный набор шести цифр. Билет называется счастливым, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних.
А) Докажите, что число счастливых билетов равно числу билетов с суммой цифр 27.
Б) Сколько счастливых билетов существует?
19. Найти число перестановок на множестве из n элементов, в которых ровно k элементов остаются на своих местах.
20. Сколькими способами можно разложить 8 различных предметов в 5 пронумерованных ящиков? Сколькими способами можно сделать это так, чтобы ни один ящик не остался пустым?