

ЛИСТОК 1

Задача 1. Известно, что существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Докажите, что уравнение $xy' + ay = f(x)$ при $a > 0$ имеет только одно ограниченное при $x \rightarrow 0$ решение и найдите предел этого решения при $x \rightarrow 0$. Докажите, что при $a < 0$ всякое решение этого уравнения имеет конечный предел при $x \rightarrow 0$ и найдите этот предел.

Задача 2. Найдите периодическое решение уравнения $y' = 2y \cos^2 x - \sin x$. Докажите, что если линейное дифференциальное уравнение первого порядка с 1-периодическими коэффициентами имеет непостоянное τ -периодическое решение, то 1 является периодом этого решения и число τ рационально.

Задача 3. Предположим, что $b, h \in C(\mathbb{R})$ и $b(x) < h(x)$. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ на интервале $(-\alpha, \alpha)$ удовлетворяют уравнениям $\dot{x} = b(x)$ и $\dot{y} = h(y)$, причем $x(0) = y(0)$. Докажите, что $x(t) \leq y(t)$ для всех $t \geq 0$.

Задача 4. Найдите **все** решения задачи Коши $\dot{x} = b(x)$, $x(0) = 0$, где $b \in C(\mathbb{R})$, $b(0) = 0$ и $b(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Задача 5. Четыре букашки, сидевшие в вершинах квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Нарисуйте траектории их движения. Какова длина каждой траектории? Каков закон движения в декартовых и полярных координатах?