1 модуль 2018
Анализ
Теория меры

Лекция 1-18. Мера Лебега

Попробуем реконструировать тот путь, который проходил Лебег, создавая теорию меры.

1 Желаемые свойства меры

Объемлющее пространство $E: S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ или $I = [0, 1]$

1. Счетная аддитивность.

$$\mu(\bigsqcup X_j) = \sum \mu(X_j),\ \sum = \sum_1^\infty$$

2. Инвариантность относительно поворота

$$\mu(X) = \mu(T_a x),\ T_a : x \mapsto x + a(\mod 1)$$

3. Непрерывность: $Y_j \searrow,\ X = \cap Y_j \Rightarrow \mu(X) = \lim_{j\to\infty} \mu(Y_j)$

4. $\mu(E) = 1$.

Меру с такими свойствами на всех подмножествах окружности определить нельзя.

2 Описание неизмеримых множеств

Рассмотрим множества $\{X_j \in S^1 | j \in \mathbb{Z}\}$ со следующими свойствами:

$a. X_l \cap X_j = \emptyset$ при $l \neq j$;

$b. \forall j \exists a_j : X_j = T_{a_j} X_0$

$c. \bigsqcup_{\mathbb{Z}} X_j = S^1$.

Теорема 1 *Множества X_j неизмеримы.*

Доказательство Пусть μ определено на X_j. Тогда $\mu(X_j) = \mu(X_0)$ (свойство 2).

$\mu(S^1) = \sum_{\mathbb{Z}} \mu(X_j)$ (свойство 1).

Но ряд с равными членами сходится только если его члены равны нулю. Следовательно, $\mu(X_j) = 0,\ \mu(S^1) = 0$ - противоречие. $\square$

3 Построение неизмеримых множеств

Рассмотрим поворот $T_\alpha, \alpha \notin Q$. Его орбиты

$$\text{orb } x = \{x + \alpha j (\bmod 1) | j \in \mathbb{Z}\}$$

состоят из счетного множества точек. Эти точки попарно различны, поскольку α иррационально. В каждой орбите возьмем по 1 точке. Получим множество X_0. Положим: $X_j = T_{\alpha j} X_0$. Легко доказать, что для множеств $\{X_j | j \in \mathbb{Z}\}$ выполнены свойства a, b, c.

Итак, меру со свойствами $1 - 4$ нельзя определить на множестве всех подмножеств окружности. Построим класс множеств $\mathcal{L}$, на котором ее можно определить. Свойства $1 - 4$ становятся аксиомами меры Лебега; все множества, которые в них фигурируют, принадлежат $\mathcal{L}$. Потребуем, чтобы класс $\mathcal{L}$ был *алгеброй* множеств.

Определение 1 *Непустая система подмножеств множества E называется кольцом, если она замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности. Если это кольцо содержит E в качестве своего элемента, то оно называется алгеброй подмножеств множества E. Алгебра, замкнутая относительно счетного пересечения, называется σ-алгеброй.*

4 Элементарные множества

Назовем промежутком I любое из множеств $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b);\ m(I) = |b - a|$.

Определение 2 *Элементарное множество - это конечное объединение промежутков. Класс всех таких множеств обозначается $\mathcal{E}$. Потребуем:*

для $A \in \mathcal{E},\ m(A) = \sum_1^N m(A_j)$, где A_j - связные компоненты множества A. Величину m будем называть длиной.

Потребуем, чтобы $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$.

Задача 1 *Вывести из аксиом $1 - 4$, что мера элементарного множества равна его длине.*

5 Счетные объединения элементарных множеств

Определение 3 *Класс* $\mathcal{E}_\sigma$ *состоит из счетных объединений элементарных множеств.*

Замечание 1 *Каждое множество* $A \in \mathcal{E}_\sigma$ *однозначно разлагается в объединение своих связных компонент:* $A = \bigsqcup A_j,\ A_j$ *- промежутки.*

6 Верхняя (внешняя) мера и мера Лебега

Определение 4 *Для любого множества* $X \subset S^1$ *определена его верхняя мера:*

$$\mu^*(X) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{E}_\sigma \\ A \supset X}} m(A).$$

Дальше следуют два главных определения.

Определение 5 *Класс* $\mathcal{L}$ *множеств, измеримых по Лебегу, состоит из тех и только тех множеств, для которых*

$$\mu^*(X) + \mu^*(CX) = 1. \tag{1}$$

Определение 6 *Для каждого* $X \in \mathcal{L},\ \mu(X) = \mu^*(X)$.

Теорема 2 *Если мера Лебега на алгебре множеств существует (то есть определена и удовлетворяет требованиям 1 - 4) и совпадает с длиной на классе элементарных множеств, то она определена на* $\mathcal{L}$ *и только так, как описано выше.*

Задача 2 *Доказать теорему 2.*

7 Эквивалентное определение меры Лебега

Определение 7 *Класс* $\mathcal{L}$ *состоит из тех и только тех множеств, которые с любой точностью приближаются элементарными в следующем смысле:*

$$X \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists A \in \mathcal{E} : \mu^*(X \Delta A) < \varepsilon.$$

Ниже мы докажем, что из определения 7 следует определение 5.

Задача 3 *Доказать обратную импликацию.*

Мы будем пользоваться только определением 7. Наша цель - доказать, что построенный класс $\mathcal{L}$ и мера на нем удовлетворяют всем требованиям (аксиомам) $1-4$. Это будет делаться шаг за шагом.