Материалы к семинарам по матанализу (третий семестр)

1-я и 2-я недели (3–14.09.2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 1–2. Мера Лебега на прямой

1. Желаемые свойства (счётная аддитивность)
2. Пример неизмеримого множества
3. Кольцо элементарных множеств
4. Внешняя мера. Измеримые множества
5. Аддитивность и счётная аддитивность меры Лебега на прямой

Примерные задачи семинаров

Задача 1.1. а) Докажите, что операция взятия симметрической разности удовлетворяет следующему аналогу неравенства треугольника: $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.
б) Докажите, что $(A * B) \triangle (A' * B') \subset (A \triangle A') \cup (B \triangle B')$, где $*$ обозначает одну из операций $\cap$, $\cup$, $\setminus$ или $\triangle$.

Непустая система подмножеств множества X называется *кольцом*, если она замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности. Если это кольцо содержит X в качестве своего элемента, то оно называется *алгеброй подмножеств* множества X. Алгебра, замкнутая относительно счетного пересечения, называется σ-алгеброй.

Задача 1.2. Образуют ли алгебру все открытые подмножества окружности? Все замкнутые подмножества? Те и другие вместе?

Задача 1.3. Докажите, что множество $\mathcal{E}$ всех элементарных множеств — это алгебра, но не σ-алгебра.

Задача 1.4. *Борелевскими множествами* называется семейство множеств, строящееся следующим образом: все интервалы лежат в этом семействе, если в нём уже лежат множества A и B, то в него включаются и $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, а если в нём лежат $A_1, A_2, \ldots$, то в него включается и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Докажите, что борелевские множества образуют σ-алгебру.

Задача 1.5. Докажите, что канторово множество — борелевское.

Задача 1.6. Докажите, что построенные на лекции множества X_j, $j \in \mathbb{Z}$ на окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, (X_0 включает в себя по одной точки из каждого множества $\{x+n\alpha, n \in \mathbb{Z}\}$, $X_j = T_{\alpha j} X_0$ образуют разбиение окружности, причём любые два из них получаются друг из друга поворотом.

Задача 1.7. Докажите, что всякая мера на кольце элементарных множеств на окружности, удовлетворяющая свойствам 1–4 лекции 1, совпадает с длиной (суммой длин промежутков, составляющих множество).

Задача 1.8. Докажите, что всякое измеримое множество на прямой есть объединение борелевского множества и множества меры 0.

Задача 1.9. Докажите, что множество всех измеримых подмножеств отрезка равномощно множеству всех подмножеств отрезка.

Задача 1.10. Докажите, что борелевские множества измеримы по Лебегу.

Задача 1.11. Докажите что подмножества отрезка [0,1] меры 0 образуют σ-кольцо.

Задача 1.12. Постройте нигде не плотное замкнутое подмножество отрезка положительной меры.

Задача 1.13. Постройте подмножество отрезка, имеющего полную меру, являющееся счётным объединением нигде не плотных множеств. (Такое множество «большое» в смысле теории меры и «маленькое» с точки зрения топологии.)

Следующая задача показывает, что множества, естественно возникающие в анализе, в большинстве своем измеримы.

Задача 1.14. Докажите, что следующие множества измеримы по Лебегу:
а) множество критических точек C^1-гладкой функции на отрезке;
б) множество критических значений C^1-гладкой функции на отрезке;
в) множество точек разрыва произвольной функции на отрезке;
г*) множество точек дифференцируемости произвольной функции на отрезке.