Листок 2.1

Мера Лебега и хаусдорфова размерность на прямой

срок сдачи 5 октября

Мера Лебега

Определение. Непустая система подмножеств множества X называется *кольцом*, если она замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности. Если это кольцо содерхит X в качестве своего элемента, то оно называется *алгеброй подмножеств* множества X. Алгебра, замкнутая относительно операции счетного объединения множеств, называется σ-алгеброй.

Задача 1. Является ли множество $\mathcal{E}_\sigma$ всех счетных объединений элементарных множеств алгеброй? σ-алгеброй?

Задача 2. Докажите, что система подмножеств множества X образует алгебру тогда и только тогда, когда система характеристических функций этих множеств образует кольцо относительно обычного умножения и сложения по модулю 2.

Задача 3. Докажите, что всякая мера на кольце элементарных множеств, удовлетворяющая свойствам 1–4, совпадает с длиной множества (суммой длин промежутков, составляющих множество).

Задача 4. Докажите теорему 2 лекции 1: Если мера Лебега существует и совпадает с длиной на классе элементарных множеств, то она определена на $\mathcal{L}$ и только так, как описано в лекции 1.

Задача 5. Докажите, что множество, измеримое в смысле определения 6 лекции 1, (с помощью внешней меры) измеримо и в смысле определения 4 (с помощью приближения элементарными множествами).

Задача 6. Докажите обратное утверждение.

Задача 7.* Найдите меру Лебега подмножества отрезка [0,1], сотоящего из чисел, в десятичной записи которых цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3.

Задача 8. Постройте пример неизмеримого множества, плотного на окружности.

Задача 9.* Борелевскими множествами на прямой называются множества, полученные, начиная с интервалов, применением операций объединения, пересечения, разности двух множеств и объединения счётного семейства множеств. Докажите, что совокупность борелевских множеств имеет мощность континуума.
Указание. Будем строить борелевские множества по шагам: на каждом шаге берём объединения счётных наборов множеств, построенных на предыдущих шагах, после чего замыкаем полученное семейство относительно операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$. На шаге с каким «номером» (как нумеруются шаги с бесконечными «номерами»?) мы гарантированно не получим ничего нового?

Задача 10.* Докажите, что по крайней мере на втором шаге процедуры, описанной в указании к предыдущей задаче, возникают множества, которые нельзя построить за один шаг этой процедуры.

Хаусдорфова размерность

Задача 11.* Оцените сверху хаусдорфову размерность подмножества прямой, состоящего из чисел без двух единиц подряд в троичной записи.

Задача 12. Для любого рационального $d \in (0, 1]$ постройте множество хаусдорфовой размерности d на прямой.

Задача 13.* Для любого $d \in (0, 1]$ постройте множество хаусдорфовой размерности d на прямой.

Задача 14. Верно ли, что хаусдорфова размерность подмножества отрезка не меняется при гомеоморфизме отрезка, удовлетворяющем условию Липшица?

Задача 15.* Верно ли, что хаусдорфова размерность подмножества отрезка не меняется при гомеоморфизме отрезка, удовлетворяющем условию Гёльдера?

Задача 16.* Пусть f — вещественная гёльдерова функция на отрезке $[0, 1]$ с показателем α. Докажите, что для любого множества $X \subset [0, 1]$ выполняется $\dim_H f(X) \leq \frac{\dim_H X}{\alpha}$.

Задача 17.* Докажите, что функция Кантора (канторова лестница) на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет условию Гёльдера и найдите ее показатель Гёльдера.

Задача 18. Пользуясь предыдущими задачами, найдите хаусдорфову размерность канторова совершенного множества.