Листок 1.

Задача 1. Рассмотрим множество всех тех векторов из $\mathbb{R}^3$, каждая координата которых равна 0 или 1. Сколько различных базисов содержит это множество?

Задача 2. Пусть $\mathbf{k} \subset \mathbf{K}$ - два поля, и $\mathbf{K}$ конечномерно как векторное пространство над $\mathbf{k}$. Любой ли элемент поля $\mathbf{K}$ является корнем некоторого многочлена из $\mathbf{k}[x]$?

Задача 3. Докажите, что для трех подпространств U, V, W векторного пространства выполняется равенство $(U+V)\cap(V+W)\cap(W+U) = (U+W)\cap V + (U+V)\cap W$.

Задача 4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи $(U\cap V)+(V\cap W)+(W\cap U) \subseteq (U+V)\cap(V+W)\cap(W+U)$, и в случае, когда U, V и W конечномерны, разность размерностей в левой и правой частях этого включения четна.

Задача 5. Пусть $e_1, ..., e_n$ - базис вещественного векторного пространства V, и $e_{n+1} = -(e_1 + ... + e_n)$. Докажите, что:
(а) любой вектор из V можно однозначно представить в виде $a_1e_1 + ... + a_ne_n + a_{n+1}e_{n+1}$, где $a_1 + ... + a_n + a_{n+1} = 0$;
(б) любое семейство векторов $e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_{n+1}$, $i = 1, ..., n+1$, является базисом, и что координаты любого вектора в одном из этих базисов неотрицательны.

Задача 6. Докажите, что в счетномерном векторном пространстве всякое подпространство счетномерно или конечномерно, а всякое несчетное подмножество векторов линейно зависимо.