Классическая теория поля 2018

Листок 1. Принцип наименьшего действия и законы сохранения

Срок сдачи: до 26 сентября

---

1. Регулятор Уатта (*Джеймс Уатт, 1788*) состоит из четырех одинаковых стержней OA, OB, AC и BC длины ℓ, двух грузов A и B, имеющих массу m каждый, и муфты C массы M, которая может скользить вдоль вертикальной оси $O\vec{z}$, проходящей через неподвижную точку O (см. рис.1). Вся система может вращаться вокруг оси $O\vec{z}$. Масса стержней и трение пренебрежимо малы. На грузы действует однородная сила тяжести, направленная против оси $O\vec{z}$.

а) Выбрав подходящий набор обобщенных координат, постройте лагранжиан этой механической системы.

б) Определите выполняющиеся в ней законы сохранения.

2. Качели-карусели. Механическая система состоит из двух невесомых жестких стержней длины R и L, и груза массы m (см. рис.2). Конец стержня R закреплен в начале координат, и стержень может свободно, т.е. без трения вращаться вокруг этого конца в горизонтальной плоскости xy. Второй конец стержня R соединен шарниром с концом стержня L, причем шарнир позволяет стержню L свободно вращаться в вертикальной плоскости стержней R и L. На другом конце стержня L закреплен груз m. В системе действует однородная сила тяжести, направленная против оси $O\vec{z}$.

а) Постройте лагранжиан, используя в качестве обобщенных координат углы θ и φ (см. рис.2). Найдите законы сохранения.

б) Определите стационарные по θ траектории движения, т.е. траектории, на которых $\dot{\theta} = 0$.

3. Материальная точка массы m движется в однородном силовом поле по прямой: $L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + gx$. Определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x + \epsilon$.

4. Задача о брахистохроне (*Иоганн Бернулли, 1696*). Материальная точка, начальная скорость которой равна 0, движется без трения в вертикальной плоскости под действием силы тяжести по некоторой кривой, соединяющей две заданные точки, начальную и конечную. Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, называемую брахистохроной, движение по которой из начальной точки в конечную занимает наименьшее время. Пользуясь вариационным принципом, составьте дифференциальное уравнение брахистохроны. Определите форму брахистохроны, используя аналог закона сохранения энергии при интегрировании дифференциального уравнения.

5. Найдите дифференциальные уравнения, характеризующие экстремали функционала

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i)\, dt$$

на траекториях с фиксированными координатами и скоростями в начальный и конечный моменты времени: $q^i(t_1) = q^i_1$, $\dot{q}^i(t_1) = \dot{q}^i_1$, $q^i(t_2) = q^i_2$, $\dot{q}^i(t_2) = \dot{q}^i_2$.

Что изменится, если искать экстремали $S[q^i(t)]$ на множестве траекторий с фиксированными координатами, но произвольными скоростями в начальный и конечный моменты времени?

6. Однородная балка прямоугольного сечения с постоянной толщиной и шириной прогибается под действием силы тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации балки в главном приближении имеет вид

$$U_{\text{упр}} = \kappa \int_0^L dx (y''(x))^2 ,$$

где L – длина балки, κ – коэффициент, зависящий от размеров сечения и материала балки, а функция $y(x)$ задает отклонение средней линии балки вниз от горизонтали (см. рис.3). В состоянии равновесия потенциальная энергия балки минимальна. Определите форму балки для трех нижеперечисленных граничных условий.

а) Мостик: концы балки свободно лежат на двух опорах, опоры расположены на одной высоте.

б) Перекрытие (потолок): балка обоими концами горизонтально вмонтирована в стену.

в) Балкон: балка одним концом горизонтально вмонтирована в стену, а другой ее конец не закреплен.

Рис. 1.

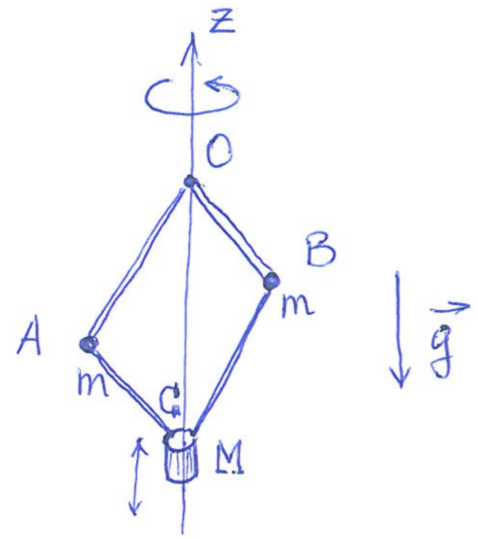

Рис. 2.

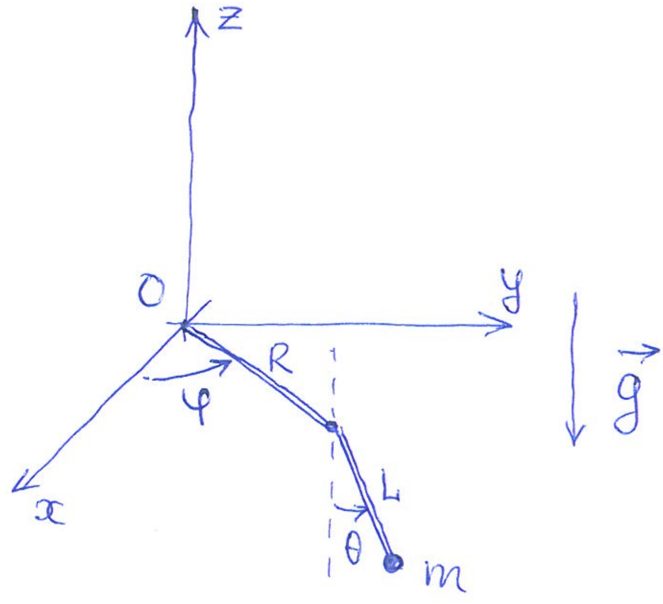

Рис. 3.