

## Задачи по группам и алгебрам Ли листок 1, 06.09.2018

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки вычисляются пропорционально). Дедлайн 2 октября. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле  $0.6$  средней оценки за листки и контрольную +  $0.4$  оценки за экзаменационную работу.

1. Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия,  $M' \subset M$  и  $N' \subset N$  — их (замкнутые) подмногообразия и  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение, такое, что  $f(M') \subseteq N'$ . Докажите, что  $f|_{M'}$  (сужение отображения на  $M'$ ) является гладким отображением  $M' \rightarrow N'$ .

2. Докажите, что для гладких многообразий свойства быть связным пространством и линейно связным пространством совпадают.

3. Напишите в явном виде экспоненциальное отображение для группы Ли матриц вида  $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , где  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

4. Найдите образ экспоненциального отображения для следующих групп Ли: а)  $GL(N, \mathbb{C})$ ; б)  $SO(N)$ ; в) группы вещественных верхнетреугольных матриц размера  $N \times N$ .

5. Докажите, что группа  $SU(2)$  как многообразие диффеоморфна сфере  $S^3$ .

6. Опишите все (не обязательно связные) подгруппы Ли в группе Ли а)  $\mathbb{R}$ ; б)  $S^1$ ; в)  $S^1 \times S^1$ .

7. Группа Ли  $G$  действует на многообразии  $M$ . Докажите, что стабилизатор  $G_m$  всякой точки  $m \in M$  является подгруппой Ли в  $G$ .

8. Для следующих действий групп Ли на многообразиях докажите, что эти действия гладки, и опишите явно орбиты и стабилизаторы точек: а) тавтологическое действие группы  $GL(N, \mathbb{R})$  на пространстве  $\mathbb{R}^N$ ; б) тавтологическое действие группы  $SO(N)$  на пространстве  $\mathbb{R}^N$ ; в) действие группы  $GL(N, \mathbb{R})$  на пространстве  $N \times N$ -матриц  $Mat_n(\mathbb{R})$  слева; г) действие группы  $GL(N, \mathbb{R}) \times GL(N, \mathbb{R})$  на пространстве  $N \times N$ -матриц  $Mat(N, \mathbb{R})$  слева и справа; д) действие группы  $GL(N, \mathbb{R})$  на пространстве симметрических билинейных форм на пространстве  $\mathbb{R}^N$  заменами базиса; е) действие группы  $GL(N, \mathbb{R})$  на пространстве кососимметрических билинейных форм на пространстве  $\mathbb{R}^N$  заменами базиса; ж) действие группы  $GL(N, \mathbb{C})$  на пространстве эрмитовых билинейных форм на пространстве  $\mathbb{C}^N$  заменами базиса.

9. Докажите, что следующие группы являются группами Ли, найдите их размерности, количество компонент связности и выясните, компактны они или нет: а)  $SL(N, \mathbb{R})$ , б)  $SL(N, \mathbb{C})$ , в)  $PGL(N, \mathbb{R})$ , г)  $PGL(N, \mathbb{C})$ , д)  $O(N)$ , е)  $U(N)$ , ж)  $SU(N)$ .

10. а) Докажите, что группа  $SO(3)$  топологически проста, т.е. в ней нет собственных замкнутых нормальных подгрупп. б) Найдите все ее связные подгруппы Ли.

11. а) Найдите все нормальные подгруппы Ли в группе сохраняющих ориентацию движений вещественной плоскости. б) Найдите все подгруппы Ли в этой группе.