1 Введение: принцип наименьшего действия

1.1 Введение к введению

- Организация курса: базовая часть (АМ + В.А.Побережный) как введение к *основам интегрируемости* (И.М.Кричевер).
- Курс гамильтоновой механики (*Механики*! – Сколтеха): дать представление об интересных *простых* задачах теоретической физики - “избранные главы” ...
- “Математика - то, что можно объяснить” (?), физика - надо думать в каждом случае (выделить простую систему из сложной). Математическая красота как один из критериев “правильности” физической теории.
- Курс квантовой механики - естественное продолжение!
- Главное - решать и сдавать задачи! Гораздо важнее, чем слушать любые лекции. По ходу курса планируются контрольные, их число уточняется ...
- Литература: Ландау-Лифшиц 1-й (и 2-й том?), Арнольд (?), Дубровин-Новиков-Фоменко (гл. 5).

1.2 Общие физические принципы

- Главная цель физики (в том числе математической) - решать реальные задачи, более естественны, часто помогает здравый смысл и т.п.
- Все основывается на некоторых общих принципах, постулатах - их принято считать естественными, результат наблюдений (пока опыт не покажет нечто прямо противоположное). Физические постулаты - аналог математических аксиом.
- Теоретическая физика - имеет дело с простыми конструкциями, часто “ничего другого просто нельзя написать” ...

- Является источником большинства задач современной математики (прямая связь с геометрией комплексных кривых, симплектической геометрией, группами и алгебрами Ли итд). В курсе будут упомянуты совсем современные (но очень простые вещи): кластерные алгебры (точнее пуассоновы кластерные многообразия), интегрируемые системы Виттена-Зайберга итп.

1.3 Картины мира

Кинематика:

- Описание системы: обобщенные координаты ($\{q\}$ или $\{x\}$), их количество – число *степеней свободы*;
- Обобщенные скорости или импульсы ($\{\dot{x}\}$ или $\{p\}$);
- $(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) = (x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots)$

Динамика:

- "Картина Тейлора": $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$;
- Однако (И.И.Ньютон): $\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = \frac{1}{m}F(x, \dot{x})$, откуда взять правую часть?
- Ответ на это в Лагранжевой и Гамильтоновой картине дает *принцип наименьшего действия.*

1.4 Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия (или принцип Гамильтона) - *не следует* ниоткуда.

$$S = \int_0^T L(q, \dot{q}; t)dt = S[q, \dot{q}; T], \tag{1}$$

- Некоторый функционал от траекторий (достаточно гладких), отображений отрезка в многообразие $q : [0, T] \mapsto M \simeq \mathbb{R}^D$;

- Зависит только от (обобщенных) координат и скоростей, гладкие траектории - “большие системы”, $S \gg \hbar$;

- На траекториях *необходимо* $\delta S = 0$,

$$\delta S = S[q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}; T] - S[q, \dot{q}; T] \tag{2}$$

  при *малых* $\delta q(t)$ (и $\delta \dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\delta q(t)$).

Из вариации действия следуют уравнения движения, определяющие траекторию системы (в пространстве конфигураций или обобщенных координат):

$$\begin{aligned}\delta L = L[q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}; t] - L[q, \dot{q}; t] \simeq \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \\ = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\end{aligned} \tag{3}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование!) или же можно сказать, что второе слагаемое интегрируется по частям:

$$\int_0^T dt\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\bigg|_0^T - \int_0^T dt\ \delta q_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4}$$

Если мы как-то занулим граничный член (существеннейшая часть – граничные условия! – это можно делать совсем по-разному): например, $\delta q|_{0,T} = 0$, тогда на экстремали (в силу произвольности вариации $\delta q(t)$ при $0 < t < T$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, \dim M \tag{5}$$

получим *уравнения Эйлера-Лагранжа* или уравнения движения лагранжевой системы.

Теорема: система уравнений Эйлера-Лагранжа (5) при фиксированных $q(0) = q_0$, $q(T) = q_1$ задают единственную траекторию (как система дифференциальных уравнений второго порядка!) на которой функционал действия $S[q, \dot{q}; T] = S(q_0, q_1; T)$ есть число (функция от трех величин) – минимальное при некоторых естественных условиях.

Доказательство: очевидно (?!). Если, конечно, предварительно сдать курс дифференциальных уравнений.

Свойства функции Лагранжа $L(q,\dot q;t)$:

- Зависит от обобщенных координат и их *первых* производных (функция на касательном расслоении TM?). Вообще говоря это не всегда так - признак *фундаментальной* физической системы ...
- Определена с точностью до полной производной по времени: легко проверить, что $L(q,\dot q;t)$ и $\tilde L(q,\dot q;t) = L(q,\dot q;t) + \frac{d}{dt}\varphi(q,t)$ дают одни и те же уравнения движения (вариация действия совпадает с точностью до граничных членов).
- Аддитивна для системы из двух невзаимодействующих подсистем.

1.5 Свободная частица

Свободное движение (принцип относительности)

$$L_{\rm free}(q,\dot q;t) = L_{\rm free}(\dot q) = l(\dot q^2) = \tfrac{1}{2}m\dot q^2 \tag{6}$$

Уравнения ЭЛ для $L = L_{\rm free}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} &= m\ddot q_i = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

с очевидным решением

$$q = q_0 + vt = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{T}t \tag{8}$$

где мы заодно проверили и аддитивность (для нескольких координат $L_{\rm free} = \sum_i \frac{1}{2}m\dot q_i^2$, для нескольких свободнах частиц $L_{\rm free} = \sum_{a,i}\frac{1}{2}m_a\dot q_{a,i}^2 = \sum_a \frac{1}{2}m_a\dot{\mathbf{q}}_a^2$).

Тут можно уже начинать "цепляться", но:

- На первом шаге действительно очевидно, что функция Лагранжа зависит только от скоростей $\dot q = v$, а значит $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = 0$, т.е. $\frac{\partial L}{\partial v} = \mathrm{const}$, а значит $v = \mathrm{const}$ при любой функции $L(v) = l(v^2)$.

- Линейность функции $l(v^2)$ следует из принципа относительности Галилея: уравнения движения ковариантны относительно преобразований $t \mapsto t$, $q \mapsto q' = q + Vt$ с постоянной V – скоростью движения системы отсчета. Действительно, при этом $v \mapsto v + V$, и при малых V

$$\begin{aligned} L' = L(v+V) = l(v^2 + 2vV + V^2) \simeq l(v^2) + l'(v^2)2vV = \\ = L(v) + \frac{d}{dt}\varphi(q) \end{aligned} \tag{9}$$

  отличаются на полную производную (т.к. обязаны давать одни и те же уравнения движения!) только при линейной $l(v^2) = \frac{1}{2}mv^2$.

- Наконец, для свободной частицы действие $S = \frac{1}{2}\int_0^T dt\, mv^2 = \frac{1}{2}mT\langle v^2\rangle$, т.е. средний квадрат скорости на траектории, очевидно минимально на решении уравнений движения ЭЛ – движении с постоянной скоростью $v = \langle v\rangle = \frac{q_1 - q_0}{T}$, поскольку

$$\langle (v - \langle v\rangle)^2\rangle = \langle v^2\rangle - \langle v\rangle^2 \geq 0 \tag{10}$$

  а значит

$$S = \tfrac{1}{2}mT\langle v^2\rangle \geq \tfrac{1}{2}mT\langle v\rangle^2 \tag{11}$$

  больше стоящего в правой части действия на траектории при любом $v \neq \langle v\rangle$.

1.6 Примеры других механических систем

А что еще можно написать? Вообще говоря:

$$L(q, \dot{q}) = -U(q) + A_i(q)\dot{q}_i + \tfrac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \ldots \tag{12}$$

просто разложение по степеням производных с любыми заданными на M “фунциями” $U(q)$, $\{A_i(q)\}$, $\{g_{ij}(q)\}$.

- Члены выше квадратичных писать "не нужно"(?!) - несущественны при медленных изменениях;

- В только что рассмотренном примере свободной частицы было $U = 0$, $A_i = 0$ и $g_{ij}(q) = \delta_{ij}$, что легко отождествляется с евклидовой метрикой в $M = \mathbb{R}^n$.

- Вообще говоря: $U(q)$ - скалярный потенциал взаимодействия (почему знак минус?), $A_i(q)$ - вектор-потенциал (магнитное поле - пока про него забудем, т.е. пусть пока $A_i = 0$), $g_{ij}(q)$ - метрика на "кривом" M, или просто в криволинейных координатах.

Можно ли положить вместо этого $g_{ij}(q) = 0$?

- Частичный (но яркий!) ответ на этот вопрос дается примером Дирака: $L(q, \dot{q}, t) = q$, приводит к уравнению движения ... $1 = 0$, т.е. не любая функция на TM имеет смысл функции Лагранжа;

- Немногим лучше пример $L(q, \dot{q}, t) = \dot{q}$, с лагранжианом – полной производной, т.е. отсутствующими уравнениями движения и действием $S = q_1 - q_0$ на *любой* траектории $q(t)$. Впрочем, иногда такие теории называются ... *топологическими* (и на эту тему читается множество курсов, например - у нас на матфаке).

Усложним пример Дирака: пусть $L(q, \dot{q}, t) = -U(q)$. Тогда решениями уравнений движения $dU = 0$ является $q(t) = q^* = \text{const}$ фиксированный (динамики нет!) набор критических точек функции $U(q)$ на многообразии M. Ситуация, однако, становится нетривиальной, когда условие

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m < n \tag{13}$$

независимости от скоростей выполняется *по части* переменных. Тогда уравнения ЭЛ по соответствующим переменным превращаются в уравнения связей

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m < n \tag{14}$$

максимум первого порядка по времени, и при удаче их можно просто разрешить относительно $q_1, \ldots, q_m$, т.е. сократить число реальных степеней свободы на $m < n$.

Пусть, наконец, $M = \mathbb{R}^D$, $g_{ij}(q) = m\delta_{ij}$, тогда уравнения движения в общем случае

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \partial_i A_j \dot{q}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + A_i(q) \\ m\ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - F_{ij}\dot{q}_j = f_i(q, \dot{q}; t), \\ F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i\end{gathered} \tag{15}$$

представляют собой 2-й закон Ньютона для силы в потенциальном $f = -\frac{\partial U}{\partial q}$ (знак – просто соглашение!) и в магнитном полях (сила Лоренца).

- Закон Ньютона - утверждение, что классическая механика описывается дифференциальными уравнениями 2-го порядка: состояние системы определяется её координатами и скоростями (импульсами), взаимодействие зависит них же. Дифференциальное уравнение вычисляет ускорения по координатам и скоростям и задает (однозначно!) состояния системы в последующие моменты времени.

- Вид естественных в природе взаимодействий почти однозначно определяется простыми свойствами действия - больше практически ничего нельзя написать! Более сложные явления - явная зависимость от времени и т.п. - более характерны для “неэлементарных” систем.