Кривые и поверхности в евклидовом пространстве
Листок 1. Гладкие многообразия.
Крайний срок сдачи 28.09.2018

1. Нарисуйте на плоскости множество точек, которое (а*) может быть образом непрерывной кривой, но не может быть образом гладкой кривой; (б) может быть образом гладкой кривой, но не может быть образом регулярной кривой.

2. Докажите, что длина эллипса $\gamma_1 = \{x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$ равна длине одной волны синусоиды $\gamma_2 = \left\{y = \sqrt{a^2 - b^2}\sin\left(\frac{x}{b}\right),\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi b\right\}$.
Замечание: Как многим, возможно, уже известно, при разрезании палки колбасы под углом отличным от прямого в сечении получается эллипс, а при снятии с остатка шкурки её граница будет синусоидой.

3. Докажите, что кривизна плоской кривой $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, где t — произвольный параметр, может быть найдена по формуле

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

(Указание: воспользуйтесь формулами Френе.)

4. Посчитайте кривизну в полярных координатах для кривой $r(\varphi)$.

5. Доказать, что для кривой $r = r(l)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\langle r', r'''\rangle &= -k^2;\\
\langle r'', r'''\rangle &= kk';\\
\langle r''', r'''\rangle &= k^4 + k^2\varkappa^2 + (k')^2.
\end{aligned}$$

6. Рассмотрим регулярную кривую $\gamma(t)$ на плоскости и функцию $S_q(t) = \|\gamma(t) - q\|^2$ квадрата расстояния до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что
(а) точка q принадлежит нормали к кривой, проведённой в точке $\gamma(t)$, тогда и только тогда, когда $S'_q(t) = 0$;
(б) q является центром кривизны (лежит на эволюте) тогда и только тогда, когда $S'_q(t) = S''_q(t) = 0$ (т.е. окружность кривизны имеет более высокий порядок касания с кривой);
(в) $\gamma(t)$ к тому же является точкой экстремума кривизны (особой точкой эволюты) тогда и только тогда, когда $S'_q(t) = S''_q(t) = S'''_q(t) = 0$ (т.е. в точках экстремума кривизны окружность кривизны имеет еще более высокий порядок касания с кривой).

7. Найдите первые квадратичные формы поверхностей:
(а) гиперболического параболоида $z = xy$;
(б) поверхности вращения: $F(h, \varphi) = (h, f(h)\cos\varphi, f(h)\sin\varphi)$.

8. * Докажите, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.