Лекция 2-18. Свойства меры Лебега

0. Напоминание

Основные определения

Элементарные множества
Их длина
Класс $\mathcal{E}_\sigma$
Длина на нем
Внешняя мера
Измеримые множества

Аксиомы меры

Мера неотрицательна и определена на алгебре мноэжеств
Счетная аддитивность
Трансляционная инвариантность
Принцип непрерывности
Нормировка

1 Измеримость дополнения

Теорема 1 *Если множество измеримо, то и его дополнение измеримо.*

Доказательство $(X \Delta A) = (CX \Delta CA)$. □

2 Алгебры и σ-алгебры множеств

Определение 1 *Алгебра подмножеств данного множества - это класс подмножеств, замкнутый относительно попарного объединения, пересечения и дополнения, содержащий данное множество.*

Определение 2 *σ-алгебра множеств - это алгебра множеств, замкнутая относительно* счетного *объединения и пересечения, а также дополнения.*

Примеры 1 *1. Множество всех борелевских подмножеств окружности - это σ-алгебра.*

2. Множество $\mathcal{E}$ - это алгебра, но не σ-алгебра. То же верно для множества $\mathcal{E}_\sigma$.

Задача 1 *Докажите это.*

3 Объединение измеримых множеств

Теорема 2 *Объединение двух измеримых множеств измеримо.*

Подробные доказательства рассказаны на лекциях и написаны в книге Колмогорова и Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа". Здесь приводятся только эскизы доказательств.

Доказательство Пусть $X, Y \in \mathcal{L},\ A, B \in \mathcal{E},\ \mu^*(X \Delta A) < \varepsilon,\ \mu^*(X \Delta B) < \varepsilon$. Тогда

$$\mu^*((X \cup Y)\Delta(A \cup B)) < 2\varepsilon.$$

Действительно,

$$(X \cup Y)\Delta(A \cup B) \subset (X \Delta A) \cup (Y \Delta B).$$

□

Следствие 1 *Измеримые множества образуют алгебру.*

4 Аддитивность меры

Теорема 3 *Мера дизъюнктного объединения двух измеримых множеств равна сумме их мер.*

Доказательство (краткое) Измеримые множества хорошо приближаются элементарными, а для элементарных теорема верна. □

Доказательство (подробное) $\mu(X \cup Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$. Это следует из определения меры и верхней меры. Докажем обратное неравенство.

Пусть $A \overset{\varepsilon}{\sim} X,\ B \overset{\varepsilon}{\sim} Y,\ A, B \in \mathcal{E}$. Выше доказано, что $A \cup B \overset{2\varepsilon}{\sim} X \cup Y$.

Предложение 1 *Для выбранных выше A и B, $\mu(A \cap B) < 2\varepsilon$.*

Доказательство $A = (X \cap A) \cup (A \setminus X)$, $B = (Y \cap B) \cup (B \setminus Y)$. Отсюда следует, что

$$A \cap B \subset (A \setminus X) \cup (B \setminus Y),$$

поскольку $X \cap Y = \emptyset$. □

Итак,

$$\mu(X \cup Y) \geq \mu(A \cup B) - 2\varepsilon = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) - 2\varepsilon \geq \mu(X) - \varepsilon + \mu(Y) - \varepsilon - 4\varepsilon.$$

□

Замечание 1 *Алгебра измеримых множеств замкнута относительно конечного объединения и пересечения. Доказательство - индукция по числу операций.*

5 Полуаддитивность длины

Определение 3 *Класс множеств, на которых определена длина (или мера, или верхняя мера) обладает свойствами полуаддитивности, если для множеств этого класса*

$$A \subset \cup A_j \Rightarrow \tag{1}$$

$$m(A) \leq \sum m(A_j) \tag{2}$$

Теорема 4 *1. Класс $\mathcal{E}$ обладает свойством полуаддитивности. 2. Тем же свойством обладает класс $\mathcal{E}_\sigma$.*

Доказательство 1. Без ограничения общности множества A_j можно считать открытыми, а множество A - отрезком. По теореме о конечном покрытии, бесконечное объединение в (1) можно заменить конечным. Для такого объединения утверждение (2) тривиально.

2. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_\sigma$. Множество $\mathcal{A}$ является дизъюнктным объединением промежутков. Сумма их длин сходится. Следовательно, аналог неравенства (2) достаточно доказать для случая, когда покрываемое множество элементарно. Покрывающие множества являются не более, чем счетными объединениями промежутков. Поэтому можно рассматривать покрытие интервалами. Для этого случая теорема уже доказана. □

6 Полуаддитивность внешней меры

Теорема 5 *Внешняя мера на классе всех множеств полуаддитивна:*

$$\mu^*(\cup X_n) \leq \sum \mu^*(X_n).$$

Доказательство Берем $\mathcal{A}_n \in \mathcal{E}_\sigma,\ \mu^*(X_n) \geq m(\mathcal{A}_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда

$$\mu^*(\cup X_n) \leq \mu^*(\cup \mathcal{A}_n) \leq \sum \mu^*(\mathcal{A}_n) \leq \sum \mu^*(X_n) + \varepsilon.$$

Второе неравенство следует из теоремы 3. □