Семинар 2.

Задача 1. Докажите, что два вектора $v = (x_1, x_2)$ и $w = (y_1, y_2)$ из $\mathbb{R}^2$ линейно зависимы (соответственно, образуют базис), когда $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ (соответственно, когда $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$).

Задача 2. В пространстве многочленов степени не выше трех над полем K составьте базис из многочленов третьей степени. Можно ли в этом пространстве найти базис, не содержащий многочленов степени три.

Задача 3. Докажите, что если L и M - два подпространства векторного пространства V, и каждый вектор из V принадлежит либо L, либо M, то одно из подпространств совпадает со всем пространством.

Задача 4. Каждое комплексное векторное пространства $V_{/\mathbb{C}}$ можно рассматривать как вещественное векторное пространство $V_{/\mathbb{R}}$. Если размерность комплексного векторного пространства $V_{/\mathbb{C}}$ равна n, то чему равна размерность пространства $V_{/\mathbb{R}}$?

Задача 5. Пусть U и V - подпространства векторного пространства W. Их *суммой* называется множество $U + V = \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\}$. Проверьте, что $U + V$ - подпространство в V. Докажите, что если пространство W конечномерно, то

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

Задача 6. Найдите какой-либо базис суммы и пересечения двух подпространств L и M в $\mathbb{R}^3$, где $L = \langle v_1 = (2, 1, 0),\ v_2 = (1, 2, 3),\ v_3 = (-5, -2, 1)\rangle$, $M = \langle w_1 = (1, 1, 2),\ w_2 = (-1, 3, 0),\ w_3 = (2, 0, 3)\rangle$.

Задача 7. Сумма $W_1 + W_2$ подпространств W_1 и W_2 векторного пространства W называется *прямой суммой* и обозначается $W_1 \oplus W_2$, если всякий вектор w из $W_1 + W_2$ однозначно представляется в виде $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2$. Докажите что сумма $W_1 + W_2$ является прямой суммой тогда и только тогда, когда $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Задача 8. Два подпространства W_1 и W_2 векторного пространства W называются *дополнительными*, если их сумма является прямой суммой $W_1 \oplus W_2$ и совпадает с W. Докажите, что для того, чтобы подпространства W_1 и W_2 конечномерного пространства W были дополнительными, необходимо и достаточно, чтобы объединение их базисов было базисом пространства W.

Задача 9. Пусть X - конечное множество из n элементов, и $F(X, K)$ - множество всех функций на X со значениями в поле K. Является ли $F(X, K)$ векторным пространством над полем K относительно поточечного сложения функций и умножения функций на скаляры? Если да, то какова его размерность? Можно ли указать какой-нибудь естественный базис в пространстве $F(X, K)$?

Задача 10. Подпространство векторного пространства $\mathbb{F}_2^n$ называется двоичным кодом. Докажите, что либо у всех кодовых векторов сумма координат равна 0, либо этим свойством обладает ровно половина кодовых векторов.