Семинар 3.

Задача 1. Найдите размерность и укажите базис пространства решений системы линейных уравнений над $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$

Задача 2. С помощью правила Крамера решите систему линейных уравнений над $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача 3. Решите систему сравнений:
$$\begin{cases} 2x + y - z \equiv 3 \\ x + 2y + z \equiv 2 \qquad (\mathrm{mod} 5) \\ x + y - z \equiv -1. \end{cases}$$

Задача 4. Найдите общее решение матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$, где $X \in M(2, \mathbb{C})$, а $i \in \mathbb{C}$ - мнимая единица.

Задача 5. *Ранг* $\operatorname{rank}(A)$ *матрицы* $A \in M_{m\times n}(\mathbf{k})$ определяется как размерность линейной оболочки ее строк как векторов в $\mathbf{k}^n$, либо линейной оболочки ее столбцов как векторов в $\mathbf{k}^m$ (эти два числа совпадают). Пусть A и B - вещественные матрицы с одинаковым числом строк. Докажите, что $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

Задача 6. Пусть A и B - квадратные матрицы одного порядка над полем $\mathbf{k}$. Докажите, что $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

Задача 7. Пусть $f : V \to W$ - линейное отображение векторных пространств. Докажите, что если V конечномерно, то размерности ядра $\ker f$ и образа $\mathrm{im} f$ отображения f связаны с размерностью пространства V соотношением $\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{im} f$.

Задача 8. Найдите какой-нибудь базис ядра линейного отображения $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, заданного в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbf{k})$, $x \in \mathbf{k}^n$, $b \in \mathbf{k}^m$. Докажите, что имеет место следующая *альтернатива Фредгольма*: либо неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ имеет решение при любом $b \in \mathbf{k}^m$, либо однородная система линейных уравнений $A^T y = 0$ имеет ненулевое решение, где A^T - матрица, транспонированная к матрице A.

Задача 10. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$. Приведите пример ненулевого линейного оператора на пространстве V, содержащего в своем ядре многочлены, обращающиеся в нуль в точке $1+i \in \mathbb{C}$, и найдите его ранг. (*Рангом* линейного отображения конечномерного пространства называется размерность образа этого отображения.)