

Риманова поверхность конечнозначной функции.

Напоминание.

Росток (голоморфной функции) в точке z это голоморфная функция f на какой-то окрестности этой точки. Голоморфная функция аналитична, и мы будем в качестве окрестности брать открытый круг сходимости этой аналитической функции. назовем два ростка предэквивалентными если круги сходимости пересекаются и на пересечении функции совпадают.

Рассмотрим отношение эквивалентности порожденное предэквивалентностью ростков. Иными словами, ростки (z_1, f_1) и (z_2, f_2) эквивалентны, если существует конечный набор ростков $\{(w_\alpha, g_\alpha) | \alpha = 1, \dots, l\}$, $(w_{\alpha+1}, g_{\alpha+1})$ предэквивалентен (w_α, g_α) и $(z_1, f_1) = (w_1, g_1)$, $(z_2, f_2) = (w_l, g_l)$. Путь γ из z_1 в z_2 соотносит ростку f_1 в z_1 его продолжение вдоль пути – росток в z_2 путем выбора промежуточных точек w_α лежащими на пути γ . Напротив всякий росток является продолжением любого эквивалентного ему ростка вдоль кусочно-гладкого пути составленного из отрезков, соединяющих $\{(w_\alpha, g_\alpha) | \alpha = 1, \dots, l\}$.

Пусть U - область в $\mathbb{C}$ и $\{p_i\}$ - конечное подмножество.

Рассмотрим многозначную функцию F на $U \setminus \{p_i\}$.

Определение 1. Функция F как выше называется конечнозначной если для какой-то точки $z \in U \setminus \{p_i\}$ число ростков функции F в этой точке конечно. Если число ростков в любой точке равно k , будем говорить, что функция k -значна.

Возьмем в качестве U круг радиуса 2 вокруг точки p , и рассмотрим k -значные функции в проколоте круге $U \setminus p$. Для любой точки $z = R(\cos \Phi + i \sin \Phi)$, $0 < r < 2$, $-\pi < \Phi \leq \pi$ и числа n определим путь $\gamma_{z,n}$ из 1 в z :

$$\gamma_{z,n}(t) = \begin{cases} \cos(2t(\Phi + 2n\pi)) + i \sin(2t(\Phi + 2n\pi)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ (R(2t - 1) - 2(t - 1))(\cos \Phi + i \sin \Phi) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Предложение 1. Пусть F – k -значная функция на проколоте круге $U \setminus p$. Выберем росток f_1 этой функции в точке 1. Тогда всякий росток F в точке z однозначно определяется остатком n по модулю k , а именно он является продолжением ростка f_1 вдоль пути $\gamma_{z,n}$.

Доказательство. Всякий росток в z является продолжением f_1 вдоль какого-то кусочно-гладкого пути γ , и достаточно γ перетянуть на $\gamma_{z,n}$ с каким-то n . Пусть $\gamma(t) = r(t)(\cos \phi(t) + i \sin \phi(t))$. $r(t)$ и $\phi(t)$ - непрерывные функции t , так как

$$r(t) + i\phi(t) = \log \gamma(t) = \int_0^t \frac{d\gamma(\tau)}{\gamma(\tau)}.$$

Перетянем путь γ на путь $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \cos \phi(2t) + i \sin \phi(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ (r(2t - 1))(\cos \Phi + i \sin \Phi) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

посредством $Q(t, s) = \rho(t, s)(\cos \psi(t, s) + i \sin \psi(t, s))$

$$\rho(t, s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{s}{2}; \\ r(\frac{2t-s}{2-s}) & \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \psi(t, s) = \begin{cases} \phi(\frac{2t}{2-s}) & 0 \leq t \leq 1 - \frac{s}{2}; \\ \Phi & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Так как $\gamma(1) = z$, $\phi(1) - \Phi = 2\pi n$ для некого целого n . Путь $\tilde{\gamma}$ перетянем на $\gamma_{z,n}$ посредством $\tilde{Q}(t, s) = \tilde{\rho}(t, s)(\cos \tilde{\psi}(t, s) + i \sin \tilde{\psi}(t, s))$

$$\tilde{\rho}(t, s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ s(R(2t-1) - 2(t-1)) + (1-s)r(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(t, s) = \begin{cases} 2st(\Phi + 2n\pi) + (1-s)\phi(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \Phi + 2\pi n & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Оставим без доказательства

Лемма 1. Путь $\gamma_{z,n}$ может быть перетянут на композицию $\gamma_{1,n}$ и $\gamma_{z,0}$.

Лемма 2. Продолжение ростка в 1 f_1 k -значной функции вдоль пути $\gamma_{1,l}$ совпадает с f_1 титтк l кратно k .

Доказательство. Так как множество ростков в 1 конечно, найдутся $n \neq m$ такие, что продолжение f_1 вдоль пути $\gamma_{1,m}$ совпадает с продолжением вдоль $\gamma_{1,n}$. Отсюда легко вывести, что продолжение вдоль пути $\gamma_{1,l}$, $l = m - n$ совпадает с f_1 . Рассмотрим наименьшее положительное L , такое, что продолжение вдоль пути $\gamma_{1,L}$ совпадает с f_1 . Продолжения вдоль пути $\gamma_{1,m}$ не совпадают с продолжением вдоль f_n , если $0 < n, m < L$, так как тогда $|m - n| < L$. Поскольку всего имеется k различных ростков в 1, $k \geq L$. С другой стороны, если остатки m и n по модулю L совпадают, то продолжение f_1 вдоль пути $\gamma_{1,m}$ совпадает с продолжением вдоль $\gamma_{1,n}$ и $k \leq L$. То есть $k = L$. Это по сути заканчивает доказательство, дальнейшие рассуждения в духе алгебры первого курса оставляются слушателям.

Конструкция. В силу Предложения 1 всякий росток f в точке z задается остатком $n \bmod k$. Сопоставим точке $(w, f(w))$ графика (= римановой поверхности) точку

$$R(w, f(w)) = \left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{1}{k}} = 2^{-\frac{n}{k}} \exp\left(\frac{1}{k} \log w\right) = 2^{-\frac{1}{k}} \exp\left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_{w,n}} \frac{dz}{z}\right)$$

проколотого единичного круга

Лемма 3 Построенное отображение R корректно, то есть зависит от ростка, а не от выбора целого числа n

Доказательство. Рассмотрим частные образы при разных представителях вычета. Пусть n и l - разные представители вычета $\bmod k$. Их разность $l = n - k$ кратна k и по Лемме 1

$$\int_{\gamma_{w,n}} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_{w,l}} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_{1,l}} \frac{dz}{z} = 2l\pi i.$$

l кратно k , стало быть $\frac{1}{k}(2l\pi i) \in \mathbb{Z}(2\pi i)$ и экспонента его равна 1.

Предложение 2. Предъявленное отображение R биективно.

Доказательство. а) инъективность.

Пусть $R(w_1, g(w_1)) = R(w_2, h(w_2)) = Z$ тогда $w_1 = Z^k = w_2$. Обозначим $w_1 = w_2$ через w . Если ростку g отвечает вычет m , а ростку h отвечает вычет n . Из равенства

$$2^{-\frac{1}{k}} \exp \left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_{w,m}} \frac{dz}{z} \right) = R(w, g(w)) = R(w, h(w)) = 2^{-\frac{1}{k}} \exp \left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_{w,n}} \frac{dz}{z} \right)$$

с учетом Леммы 1 следует

$$\exp \left(\frac{(m-n)2\pi i}{k} \right) = \exp \frac{1}{k} \left(\int_{\gamma_{1,m-n}} \frac{dz}{z} \right) = \exp \frac{1}{k} \left(\int_{\gamma_{w,m}} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_{w,n}} \frac{dz}{z} \right) = 1.$$

В итоге получаем сравнимость m и n по модулю k и, стал быть, совпадение g и h .

Проколотый круг в W -плоскости естественно дополнить центром, тем самым мы можем дополнить риманову поверхность k -значной функции на проколоте диске одной точкой. Эта (частичная) компактификация естественно снабжена координатой W .

Если F k -значна на $U \setminus \{p_i\}$ можно рассмотреть непересекающиеся проколотые круги $D_i^* \subset U \setminus \{p_i\}$ вокруг точек p_i и ограничить F на них.

Замечание. Многозначная функция при ограничении может распасться в объединение многозначных функций, однако k -значная распадается в объединение l_α -значных, $\sum l_\alpha = k$. Компактифицируя по отдельности соответствующие непересекающиеся "локальные" римановы поверхности, получаем искомую (частичную) компактификацию римановой поверхности.