1 Введение: принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

Принцип наименьшего действия замечателен и тем, что помимо уравнений движения дает сразу дополнительную информацию о системе. В частности - главное, что бы обсудим на этой лекции - *симметрии* действия системы приводят к *законам сохранения*.

2.1 Энергия

Функция Лагранжа *замкнутой* (в более общем случае - *консервативной*) системы *явно* (требуется расшифровать!) не зависит от времени. Поэтому для нее в формуле

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{1}$$

последнее слагаемое в правой части отсутствует. На уравнениях движения ЭЛ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2}$$

поэтому

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \underset{\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)}{=} \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{3}$$

а стало быть

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0 \tag{4}$$

и величина

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{5}$$

сохраняется $\frac{dE}{dt} = 0$ (для явно не зависящей от времени функции Лагранжа консервативной системы) на уравнениях движения, или как говорят является *интегралом движения*.

- Эта величина называется *энергией*. Например для движения в потенциальном поле

$$
\begin{aligned}
L &= \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q) \\
E &= \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

  полная энергия является суммой кинетической (зависящей от скоростей) и потенциальной (зависящей только от координат) энергий.

- Закон сохранения энергиии является следствием инвариантности действия относительно сдвига времени $t \mapsto t + \epsilon$.

- Энергия, выраженная не через координаты и скорости, а через координаты и *импульсы* $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (если эти уравнения можно разрешить относительно скоростей)

$$
E = \left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right)_{\dot{q}_i(q,p)} = (p_i\dot{q}_i - L)_{\dot{q}_i(q,p)} = H(p,q) \tag{7}
$$

  называется функцией Гамильтона, а преобразование $L \to H$ преобразованием Лежандра.

- Самый важный интеграл движения: для большинства физических систем - единственный! Это определяет выделенную роль энергии в статистической физики. В квантовой механике гамильтониан - оператор эволюции, вернемся к этому при рассмотрении гамильтонова формализма.

2.2 Импульс

Пусть теперь функция Лагранжа не зависит от какой-либо из координат (называемой циклической) q_A (или - что то же самое - от сдвига координаты q_A: $L|_{q_A+\epsilon} = L$. Тогда из соответствующего уравнения ЭЛ следует, что

$$
\frac{dp_A}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} = \frac{\partial L}{\partial q_A} = 0 \tag{8}
$$

т.е. соответствующая компонента импульса $p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}$ является интегралом движения.

Пример: для свободной частицы *все* компоненты импульса $\frac{dp_i}{dt} = 0$, $i = 1, \ldots, D$ являются интегралами движения, т.е. число независимых интегралов движения равно числу степеней свободы. Такие системы называются *интегрируемыми*, при этом любой другой интеграл движения (например энергия свободной частицы $E = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2$) выражается через эти независимые компоненты импульса.

Предположим теперь, что лагранжиан инвариантен лишь относительно *одновременного* сдвига всех координат

$$L(q, \dot{q}) = L(q_1 + \epsilon, \ldots, q_D + \epsilon, \dot{q}), \qquad \frac{dL}{d\epsilon} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{9}$$

Тогда в силу уравнений движения сохраняется лишь полный импульс $P = \sum_i p_i$, поскольку

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{10}$$

Пример: системы частиц: $q \to \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N\} \in (\mathbb{R}^D)^{\times N}$

$$L(x, \dot{x}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2} \dot{\mathbf{x}}_a^2 - U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \tag{11}$$

2-й закон Ньютона

$$m_a \ddot{\mathbf{x}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_a} \quad a = 1, \ldots, N \tag{12}$$

где силы определяются потенциальной энергией, и зависят *только* от взаимного расположения тел, $U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = \sum_{a<b} V(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$. Для такого потенциала $U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}, \ldots, \mathbf{x}_N + \mathbf{r}) = U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$, а стало быть полный импульс $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_a} = \sum_a m_a \dot{\mathbf{x}}_a$ сохраняется.

2.3 Теорема Нетер

Идейно: *всякая непрерывная однопараметрическая симметрия задачи влечёт существование закона сохранения.*

Теорема 1 *Если лагранжиан $L(q,\dot{q},t)$ сохраняется под действием однопараметрической группы диффеоморфизмов $\delta q = \epsilon\chi(q)$ или*

$$\begin{gathered} q^1 \mapsto q^1(\epsilon) = q^1 + \chi^1(q)\cdot\epsilon + o(\epsilon) \\ \vdots \\ q^n \mapsto q^n(\epsilon) = q^n + \chi^n(q)\cdot\epsilon + o(\epsilon) \end{gathered} \tag{13}$$

То система имеет первый интеграл следующего вида

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\chi^i = \mathrm{const}$$

В данном случае можно говорить о том, что на многообразии M обобщенных координат $\{q\}$ действует некоторая группа G симметрий (преобразований, оставляющих действие инвариантным), а $X = \chi^i\frac{\partial}{\partial q_i}$- векторное поле $X \in \mathfrak{g} = Lie(G)$, отвечающее ее некоторой однопараметрической подгруппе.

Действие группы $G : M \mapsto M$ индуцирует действие на касательном расслоение TM, при котором вектора касательного пространства преобразуются как дифференциал отображения $M \mapsto M$

$$\begin{gathered} q^i \mapsto \tilde{q}^i(q), \qquad i = 1,\ldots,\dim M \\ \chi^i \mapsto \tilde{\chi}^i = \chi^j\frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q_j} \end{gathered} \tag{14}$$

Непрерывной симметрией будем называть однопараметрическую группу диффеоморфизмов M (гладких преобразований обобщённых координат, а вообще говоря - можно добавить и время), сохраняющих действие, т.е.

$$\begin{gathered} q(t) \mapsto \tilde{q} = q(t;\epsilon) \\ L(q,\dot{q},t) = L(\tilde{q},\dot{\tilde{q}},t) \end{gathered} \tag{15}$$

Пример: Свободная частица в $\mathbb{R}^2$, координаты декартовы, преобразование – поворот (на угол ϵ – не обязательно малый!):

$$\begin{aligned} q_1 \mapsto \quad & \tilde{q}_1 = \cos\epsilon\cdot q_1 + \sin\epsilon\cdot q_2 \\ q_2 \mapsto \quad & \tilde{q}_2 = -\sin\epsilon\cdot q_1 + \cos\epsilon\cdot q_2 \end{aligned}$$

Лагранжиан $L(q,\dot q) = \frac{m}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2)$. При деформации получаем $L(\tilde q, \dot{\tilde q}) = \frac{m}{2}(\dot{\tilde q}_1^2 + \dot{\tilde q}_2^2) = \frac{m}{2}(\cos^2\epsilon + \sin^2\epsilon)(\dot q_1^2 + \dot q_2^2) = L(q,\dot q)$ Лагранжиан вообще не изменился, значит и действие не изменилось, данное преобразование действительно является симметрией.

Доказательство: упражнение на дифференцирование. Очевидно, что дифференцируя по параметру преобразования ($q' = \frac{dq}{d\epsilon}$)

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\epsilon} L(q(t,\epsilon), \dot q(t,\epsilon); t) = \frac{\partial L}{\partial q} q' + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \dot q' \underset{\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}}{=} \\ = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} q' + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q} q'\right) \end{aligned} \tag{16}$$

откуда с очевидностью

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\chi\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q} q'\right)\Bigg|_{\epsilon=0} = 0 \tag{17}$$

- Закон сохранения импульса (полного импульса или его компонент) - очевидные частные случаи;
- Вращательная симметрия - задача на разбор

2.4 Одномерное движение

Зачем нужны интегралы движения? Рассмотрим самый простой пример.

Пусть у нас есть консервативная система с одной степенью свободы, т.е.

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot x^2 - U(x) \tag{18}$$

если ограничиться квадратичным по производной слагаемым. (Почему нет члена $A(x)\dot x$, коэффициент $g(x) = m$ можно считать константой или просто массой, а $q = x \in \mathbb{R}$ – декартовой координатой?)

Уравнения движения нам хорошо знакомы

$$m\ddot x = -\frac{dU}{dx} \tag{19}$$

и их решение всем хорошо известно (?) в линейном случае ($U(x) = \frac{k}{2}x^2$ – гармонический осциллятор). Для решения задачи в произвольном потенциале достаточно ответить на два простых вопроса:

- Есть ли у данного дифференциального уравнения интегрирующий множитель?
- Может ли помочь найденный в начале лекции (и *всегда* существующий у такой системы) интеграл движения: энергия $\frac{dE}{dt}=0$.

Ответы на два данных вопроса положительны и эквивалентны. Действительно, домножив обе части равенства (19) на $\dot{x}$, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\dot{x} &= -\frac{dU}{dx}\dot{x} \\ \frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^2}{2} &= -\frac{d}{dt}U(x) \\ \frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E, &\qquad \frac{dE}{dt}=0 \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом вместо дифференциального уравнения 2-го порядка (19) мы получили дифференциальное уравнение первого порядка, которое интегрируется (при любом потенциале!) разделением переменных

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} \\ t=\int dt &= \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \end{aligned} \tag{21}$$

где ответ (приведенный в виде неопределенного интеграла) пишется в виде неявной функции $t=t(x;E,C)$ с двумя константами интегрирования – энергией и, например, начального момента времени.

Одномерное движение консервативной системы (с интегралом движения – сохраняющейся энергией) представляет собой простейший пример *интегрируемой системы*. Ответ для этой задачи (с любым полиномиальным потенциалом $U(x)$ степени ≥ 3) выражается через абелев интеграл от голоморфного дифференциала $\frac{dx}{\sqrt{(E-U(x))}}$ на гиперэллиптической кривой $y^2=E-U(x)$ вложенной в $\mathbb{C}^2$.

2.5 Система двух тел

В качестве простейшего обобщения рассмотрим систему двух тел в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^D \ni \mathbf{x}$, т.е. систему с лагранжианом

$$L = \sum_{a=1,2} \tfrac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a^2 - U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \tag{22}$$

Как мы уже видели у этой системы есть D интегралов движения – полный импульс

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1,2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{P} = 0 \tag{23}$$

что позволяет в два раза сократить число степеней свободы.

Перейдем в систему центра масс положив

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1,2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a = 0 \tag{24}$$

и введем относительную координату $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Два последние равенства можно разрешить относительно

$$\mathbf{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{x} \tag{25}$$

поставляя которые в лагранжиан (22) получаем

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}) \tag{26}$$

т.е. систему из единственной частицы с приведенной массой

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{27}$$

- Физически это рассуждение легко проверить в пределе, скажем $m_1 \gg m_2$. Тогда движением тяжелого тела можно пренебречь и система (26) сводится к движению легкого тела с $m \to m_2$.

- Математически это рассуждение представляет собой простейший пример так называемой *гамильтоновой редукции*, когда мы садимся на поверхность уровней некоторых интегралов движения (в данном случае $\mathbf{P} = 0$) и факторизуем систему по действию соответствующей группы инвариантности (в данном случае по общему сдвигу всех координат). Об этом подробнее ниже.

- При $D = 1$ система интегрируема – возвращаемся к предыдущему примеру.

Интегрируемые потенциалы

- У систем частиц $U(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) = \sum_{a<b} V(|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|)$ существует два почти очевидных *интеграла движения*: энергия системы

$$E = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^2 + U(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) \tag{28}$$

  и полный импульс (т.е. на самом деле D интегралов)

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\mathbf{q}}_a \tag{29}$$

  Как это доказать?

- Для определенных потенциалов интегралов движения может оказаться гораздо больше. При $D = 1$ самыми известными системами с "*максимально возможным*" числом интегралов движения являются системы Калоджеро $V(q) \sim 1/q^2 + \ldots$ и Тоды $V(q) = e^q$ (но только для $|a - b| = \pm 1$).

Явными примерами потенциалов Калоджеро являются

$$V(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{q^2} \\ \dfrac{1}{\sinh^2 q} \\ \wp(q) \end{cases} \tag{30}$$

где синус можно взять и обычный, а

$$\begin{gathered} \wp(q) = \wp(q|\tau) \\ \wp(q+1) = \wp(q+\tau) = \wp(q) \end{gathered} \tag{31}$$

обозначает двояко-периодическую (эллиптическую) функцию Вейерштрасса.

Потенциалы Тоды

$$U(q) = \sum_a V(q_{a+1} - q_a) = \sum_a e^{q_{a+1} - q_a} \tag{32}$$

имеют прямое отношение к алгебрам (и группам!) Ли.

При $D > 1$ аналогов (мне?!) неизвестно.