Соглашение. Все векторные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что операции сложения $X \times X \to X$ и умножения на число $\mathbb{K} \times X \to X$ непрерывны.

1.2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что его замыкание $\overline{X_0}$ — тоже векторное подпространство в X.

1.3. Пусть $p, q \in (1, +\infty)$, и пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(a) Докажите *неравенство Юнга*:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b \geqslant 0).$$

(b) Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ положим $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$. Из неравенства Юнга выведите *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

(c) Из неравенства Гёльдера выведите *неравенство Минковского*:

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

Таким образом, $\|\cdot\|_p$ — норма на $\mathbb{K}^n$. Положим также $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Ясно, что $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ тоже являются нормами на $\mathbb{K}^n$.

1.4. Нарисуйте единичный шар на плоскости $\mathbb{R}^2$, снабженной нормой $\|\cdot\|_p$, для различных $p \in [1, +\infty]$. Обратите внимание на случаи $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Что происходит с единичным шаром с ростом p?

1.5. Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на векторном пространстве X, и пусть B и B' — соответствующие замкнутые единичные шары. Докажите, что $B \subseteq B' \iff \|\cdot\|' \leqslant \|\cdot\|$.

1.6. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.
(a) Докажите, что $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$ на $\mathbb{K}^n$.
(b) Докажите, что существует такая константа $C = C_{n,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на $\mathbb{K}^n$.
(c) Можно ли эту константу выбрать не зависящей от n?
(d) Найдите наименьшую константу $C_{n,p,q}$ с указанным свойством.

1.7. Пусть c_{00} — пространство всех *финитных* последовательностей (т.е. числовых последовательностей $x = (x_n)$, для каждой из которых существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n = 0$ для всех $n > N$). Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на c_{00} при $p \neq q$?

1.8. Пусть X — полунормированное пространство, и пусть $N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Покажите, что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \qquad (x \in X)$$

корректно определяет норму на X/N. (Корректность в данном случае означает, что правая часть этой формулы зависит лишь от класса $x + N \in X/N$, а не от самого элемента $x \in X$).

Если (X, μ) — пространство с мерой и $p \in [1, +\infty)$, то через $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ обозначается множество всех таких измеримых функций $f \colon X \to \mathbb{K}$, что функция $|f|^p$ μ-интегрируема. Для каждой $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ положим

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

1.9. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $p,q\in(1,+\infty)$ таковы, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
(a) Докажите, что если $f\in\mathscr{L}^p(X,\mu)$ и $g\in\mathscr{L}^q(X,\mu)$, то функция fg интегрируема и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_X |fg|\,d\mu \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

(b) Из неравенства Гёльдера выведите, что $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ — векторное пространство, и что справедливо *неравенство Минковского*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p \qquad (f,g\in\mathscr{L}^p(X,\mu)).$$

Таким образом, $\|\cdot\|_p$ — полунорма на $\mathscr{L}^p(X,\mu)$. Ясно, что это утверждение верно и для $p=1$.

Нормированное пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ (см. задачу 1.8), обозначается через $L^p(X,\mu)$. Таким образом, $L^p(X,\mu)=\mathscr{L}^p(X,\mu)/\{f : f=0 \text{ п.в.}\}$. Заметим, что если $X=\mathbb{N}$ и μ — считающая мера, то $\mathscr{L}^p(X,\mu)=L^p(X,\mu)$, и $L^p(X,\mu)$ совпадает с пространством

$$\ell^p=\Big\{x=(x_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p=\Big(\sum_n |x_n|^p\Big)^{1/p}<\infty\Big\}.$$

1.10. Пусть $1\leqslant p\leqslant q\leqslant+\infty$.
(a) Докажите, что существует такая константа $C=C_{a,b,p,q}>0$, что $\|\cdot\|_p\leqslant C\|\cdot\|_q$ на пространстве $C[a,b]$.
(b) Найдите наименьшую константу $C_{a,b,p,q}$ с указанным свойством.
(c) Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $C[a,b]$ при $p\neq q$?

Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Измеримая функция $f\colon X\to\mathbb{K}$ называется *существенно ограниченной*, если существует такое измеримое множество $E\subset X$, что $\mu(X\setminus E)=0$ и f ограничена на E. *Существенная верхняя грань* функции $|f|$ определяется формулой

$$\operatorname{ess\,sup}|f|=\inf\big\{\sup_{x\in E}|f(x)| : E\subset X,\ \mu(X\setminus E)=0\big\}. \tag{1}$$

1.11. Докажите, что inf в формуле (1) достигается. Как следствие, $\operatorname{ess\,sup}|f|=0$ тогда и только тогда, когда $f=0$ п.в.

1.12. Пусть $f\in C[a,b]$. Докажите, что $\operatorname{ess\,sup}|f|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Множество всех существенно ограниченных измеримых функций на (X,μ) обозначается через $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$.

1.13. Докажите, что $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ — векторное пространство, и что формула $\|f\|=\operatorname{ess\,sup}|f|$ задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$.

Нормированное пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ (см. задачу 1.8), обозначается через $L^\infty(X,\mu)$. Таким образом, $L^\infty(X,\mu)=\mathscr{L}^\infty(X,\mu)/\{f : f=0 \text{ п.в.}\}$. Заметим, что если $X=\mathbb{N}$ и μ — считающая мера, то $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)=L^\infty(X,\mu)$, и $L^\infty(X,\mu)$ совпадает с пространством ℓ^∞ всех ограниченных последовательностей, снабженным sup-нормой.

1.14. Пусть $1\leqslant p<q\leqslant\infty$. Покажите, что
(a) $\ell^p\subset\ell^q$, но $\ell^p\neq\ell^q$;
(b) если $\mu(X)<\infty$, то $L^q(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)$, причем включение является строгим при условии, что X содержите бесконечно много дизъюнктных измеримых множеств положительной меры;
(c) $L^p(\mathbb{R})\not\subset L^q(\mathbb{R})$ и $L^q(\mathbb{R})\not\subset L^p(\mathbb{R})$.

1.15. Покажите, что норма на пространствах $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_p)$, ℓ^p, $(C[a,b],\|\cdot\|_p)$, $L^p(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой, содержащее хотя бы два дизъюнктных измеримых множества положительной меры) не порождается скалярным произведением (кроме случаев $n=1$, $p=2$).

1.16. Обобщите тождество параллелограмма на случай n векторов.

1.17. Покажите, что при $p\neq 2$ норма на пространствах ℓ^p, $(C[a,b],\|\cdot\|_p)$, $L^p(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой, содержащее бесконечно много дизъюнктных измеримых множества положительной меры) не эквивалентна никакой норме, порожденной скалярным произведением.