Семинар 4.

Задача 1. Имеет ли решение система линейных уравнений над $\mathbb{R}$:
$\begin{cases} 2x_1 & +5x_2 & -8x_3 & = 8 \\ 4x_1 & +3x_2 & -9x_3 & = 9 \\ 2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = 7 \\ x_1 & +8x_2 & -7x_3 & = 12 \end{cases}$? Если да, то найдите ее общее решение.

Задача 2. Найдите множество всех векторов в $\mathbb{R}^3$, отображающихся в вектор $b \in \mathbb{R}^4$ при линейном отображении $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, заданном в стандартных базисах матрицей A, где
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Найдите какой-либо базис ядра линейного отображения $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, заданного в стандартных базисах матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найдите многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени 3, для которого $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, $f(2) = 33$.

Задача 5. Для данной матрицы $A \in M_{m\times n}(\mathbf{k})$ найдите матрицы B_I, B_{II}, B_{III} (соответственно, C_I, C_{II}, C_{III}), умножение на которые (с какой стороны?) осуществляет элементарные операции I (прибавление к строке другой строки с коэффициентом), II (умножение строки на ненулевой скаляр), III (перестановка местами двух строк) над строками (соответственно, столбцами) матрицы A.

Задача 6. Докажите, что умножение (слева или справа) матрицы A на обратимую квадратную матрицу соответствующего размера не меняет ранга матрицы A.

Задача 7. Укажите правило, по которому с помощью элементарных операций над строками квадратной матрицы A можно определить, является ли матрица A обратимой, и если да, то найти обратную к A матрицу.

Задача 8. Пользуясь правилом, найденным в задаче 7, определите, являются ли обратимыми следующие матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, и в случае обратимости найдите обратные к ним.

Задача 9. Сформулируйте и докажите правило блочного умножения матриц
$X_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Докажите, что если матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbf{k})$ имеет ранг 1, то найдутся матрицы $X \in M_{m\times 1}(\mathbf{k})$ и $Y \in M_{1\times n}(\mathbf{k})$ такие, что $A = XY$.