Лекция 3-18. Продолжение меры. Хаусдорфова размерность

Продолжим доказательство того, что мера Лебега на классе измеримых множеств удовлетворяет сформулированным выше аксиомам.

1 σ-алгебра измеримых множеств

Теорема 1 *Измеримые множества образуют σ-алгебру:*

$$X_j \in \mathcal{L} \Rightarrow \cup X_j \in \mathcal{L}.$$

Доказательство $X := \cup X_j,\ Y_j = X_j \setminus \cup_1^{j-1} X_k,\ X = \bigsqcup Y_j.$

$$Y(N) = \bigsqcup_1^N Y_j,\ R_N = \bigsqcup_{N+1}^{\infty} Y_j.$$

$$\mu(Y(N)) = \sum_1^N \mu(Y_j) \leq 1 \Rightarrow \sum \mu(Y_j) < \infty.$$

В силу полунепрерывности внешней меры

$$\exists N : \mu^*(R_N) < \varepsilon.$$

Возьмем $A \in \mathcal{E} :\ A \overset{\varepsilon}{\sim} Y(N)$. Тогда $A \overset{2\varepsilon}{\sim} X$. $\square$

2 Счетная аддитивность меры Лебега

Теорема 2 *Мера дизъюнктного объединения измеримых множеств равна сумме мер этих множеств. На языке формул: Пусть $X_j \in \mathcal{L}$. Тогда $\mu(\bigsqcup X_j) = \sum \mu(X_j)$.*

Доказательство $\mu(X) \leq \sum \mu(X_j)$(*полуаддитивность внешней меры*). В силу конечной аддитивности меры Лебега, $\forall N,\ \mu(X) \geq \mu(\bigsqcup_1^N X_j) \Rightarrow \mu(X) \geq \sum \mu(X_j)$. $\square$

3 Принцип непрерывности

Теорема 3 $X = \cap Y_j,\ Y_j \in \mathcal{L},\ Y_j \searrow \Rightarrow \mu(X) = \lim \mu(Y_j)$.

Доказательство Достаточно рассмотреть случай, когда пересечение множеств Y_j пусто; для этого нужно заменить Y_j на $Y_j \setminus X$. Итак,

$$\text{\textit{Теорема} } 3 \Leftrightarrow \cap Y_j = \emptyset \Rightarrow \mu(Y_j) \to 0.$$

Положим: $X_j = Y_j \setminus Y_{j+1}$. Тогда

$$Y_1 = \bigsqcup X_j (\text{ \textit{доказательство просто} }).$$

Тогда $\sum \mu(X_j) < \infty$ и $\sum_N^\infty \mu(X_j) = \mu(\cup_N^\infty X_j) \to 0$ при $N \to \infty$. Но

$$\cup_N^\infty X_j = Y_N.$$

□

4 Резюме: теорема о продолжении меры

В этой и прошлой лекции мы доказали следующую фундаментальную теорему.

Теорема 4 *Длина может быть продолжена с алгебры всех элементарных множеств до неотрицательной меры, определенной на некоторой σ-алгебре множеств и удовлетаоряющей аксиомам 1 - 4 лекции 1.*

Большая часть рассуждений была вполне абстрактной и не использовала свойств элементарных множеств. Определение элементарных множеств было испольовано дважды:

один раз, когда мы доказывали, что для любых двух таких множеств A и B

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

другой раз, когда мы доказывали полунепрерывность длины на $\mathcal{E}_\sigma$.

Это замечание будет важно для дальнейшего.

5 d-мерная мера Хаусдорфа и ее зависимость от d

Внешняя мера Лебега похожа на d-мерную меру Хаусдорфа. Эта мера позволяет определить хаусдорфову размерность, которая находит много применеий в разных частях анализа.

Определение 1 *Покрытием U множества $K \subset [0,1]$ называется открытое множество, содержащее K.*

d-мерным объемом открытого множества

$$U = \sqcup U_n \tag{1}$$

называется

$$V_d(U) = \Sigma |U_n|^d.$$

Диаметром покрытия U (1) *называется*

$$diam\ U = max|U_n|.$$

Определение 2 *d-мерная мера Хаусдорфа множества $X \subset \mathbb{R}$ – это*

$$m_d(X) = \lim_{U \supset X} \inf_{diam\ U \to 0} V_d(U)$$

Теорема 5 *Мера m_d как функция от d ведет себя следующим образом: существует $d_* \leq 0$:*

$$\forall d > d_*,\ m_d(X) = 0;\ \forall d < d_*,\ m_d(X) = \infty.$$

6 Хаусдорфова размерность $\dim{}_H X$

Определение 3 *$dim\ _H X$ – это то самое d_* из теоремы 5.*

Определение 4

$$dim\ _H X = \inf\{d | m_d(X) = 0\}$$

Задача 1 *Докажите эквивалентность этих двух определений.*

Задача 2 *Множество положительной меры Лебега на отрезке $[0, 1]$ имеет хаусдорфову размерность 1.*

7 Инвариантность

Теорема 6 *Хаусдорфова размерность не меняется при диффеоморфизмах и липшицеморфизмах (гомеоморфизмах, липшицевых вместе с обратным).*

Замечание 1 *Хаусдорфова размерность – это инвариант, различающий между собой множества лебеговой меры 0.*