Алгебра. Второй курс. Семинар 4

Задача 1. Пусть $f(x) \in K[x]$ - неприводимый многочлен над полем характеристики $p > 0$. Докажите, что найдется сепарабельный неприводимый многочлен $g(x) \in K[x]$ и целое число n такие, что

$$f(x) = g(x^{p^n}).$$

Задача 2. Поле K характеристики $p > 0$ называется совершенным, если гомоморфизм Фробениуса $F : K \to K$, $F(a) = a^p$, сюръективен. Докажите, что любой неприводимый многочлен над совершенным полем сепарабелен.

Задача 3. Предположим, что характеристика поля K отлична от 2. Докажите, что любое расширение $K \subset L$ степени 2 имеет вид $L = K(\sqrt{a})$ для некоторого $a \in K$.

Задача 4. Пусть p - нечетное простое число, $K \supset \mathbb{Q}$ - поле разложения многочлена $x^p - 1$.
(а) Вычислите группу Галуа K над $\mathbb{Q}$.
(б) Докажите, что K содержит единственное квадратичное подрасширение $K \supset F \supset \mathbb{Q}$, $[F : \mathbb{Q}] = 2$.
(в) Найдите $a \in \mathbb{Q}$ такое, что $F = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. (Указание: существует единственный сюръективный гомоморфизм $\chi : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \{1, -1\}$. Пусть $\beta \in K$ - произвольный элемент. Покажите, что если сумма

$$\sum_{g \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \chi(g) g(\beta)$$

отлична от 0, то в качестве a можно взять ее квадрат.)

Задача 5. Пусть простое число p имеет вид $2^n + 1$ для некоторого целого числа n, $K \supset \mathbb{Q}$ - поле разложения многочлена $x^p - 1$.
(а) Покажите, что существует цепочка подрасширений $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \cdots \subset F_n = K$ такая, что $[F_i : F_{i-1}] = 2$.
(б) Докажите, что правильный p-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

Задача 6. Докажите, что группа Галуа поля разложения многочлена $x^5 - 6x + 3$ над $\mathbb{Q}$ изоморфна S_5. (Покажите, что многочлен $x^5 - 6x + 3$ неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет ровно 3 вещественных корня).