

**Задача 1.** Запишите формулами:

- $x$  кратно двум или кратно трём;
- целое число  $y$  меньше тринадцати, но больше единицы;
- если  $t$  — рациональное число, то  $2t + 3$  — иррациональное число.

**Задача 2.** Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

- $r \vee \neg r$  (*tertium non datur* — переведите на русский!);
- $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$  (*modus ponens* — правило вывода).

**Задача 3.** Докажите тождество:  $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$  и  $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$  (формулы де Моргана). В других обозначениях:  $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$  и  $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ .

**Задача 4.** Запишите отрицание формулы  $r \Rightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$ , используя только операции  $\vee$  и  $\wedge$ .

**Задача 5.** Составьте таблицу истинности функции

$$g(p, q, r) = (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}).$$

**Задача 6.** а) Дана булева функция трех переменных

$p$	$q$	$r$	$f(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

$p$	$q$	$r$	$f(p, q, r)$
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Выразите её через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

б) Более общо, зная значения булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  на всех возможных  $2^n$  наборах переменных, выпишите формулу для  $f$  с использованием операций  $\wedge, \vee, \neg$  (дизъюнктивная нормальная форма).

**Задача 7.** Запишите предложение  $(\exists!x)\varphi(x)$  с помощью кванторов  $\exists$  и  $\forall$ .

**Задача 8.** Верны ли следствия (докажите либо приведите контрпример):

- $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)$ ,
- $(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)$ ?

**Задача 9.** Напишите отрицание следующих утверждений, не используя явно отрицательных оборотов:

- В любой электричке Одинцово-Москва хотя бы в одном из вагонов все пассажиры — безбилетники;
- В любой электричке Одинцово-Москва хотя бы в одном из вагонов есть безбилетник.

**Задача 10.** Постройте отрицания предложений, не содержащие символа отрицания:

- $\exists a \in [1; 2] \quad \forall b \in [5; 7] \quad \exists a > b$ ;
- $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 x \in \mathbb{Z}$ .

Для каждого из предложений выясните, верно ли оно или его отрицание.

**Задача 11.** Пусть  $\{a_n\}$  - последовательность вещественных чисел. Что означают высказывания:

- a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - a| < \varepsilon$  ?
- b)  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N |a_n - a| < \varepsilon$  ?
- c)  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N |a_n - a| > \varepsilon$  ?

**Задача 12.**

- a) Сколько всего существует бинарных логических операций? Сколько существует бинарных логических операций  $*$  таких, что  $p*q$  не зависит от  $p$ ?
- b) Сколько существует бинарных операций  $\star$ , для которых  $r \star r = \neg r$  ?
- c) Каково количество булевых функций от  $n$  переменных?
- d) Каково количество симметрических булевых функций от  $n$  переменных?

**Задача 13.**

- a) Всякая ли булева функция является многочленом относительно операций сложения по модулю два и конъюнкции?
- b) Покажите, что непостоянная функция от нескольких переменных, задаваемая формулой, в которой участвуют только знаки  $\oplus$  (плюс по модулю 2), принимает значения 0 и 1 одинаковое число раз.
- c) \* Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

### Домашнее задание

Задачи 1–3 — письменно

**Задача 1.** Запишите с помощью кванторов и логических операций:

- a) «Для каждого целого  $x$  найдётся целое  $y$  такое, что  $x + y > 0$ ».
- b) «В любом треугольнике  $ABC$  медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке».
- c) «Существует бесконечно много пар простых чисел, отличающихся на 2».

**Задача 2.** Верно ли, что формулы  $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$  и  $x\bar{z} \vee z\bar{y} \vee y\bar{x}$  задают одну и ту же булеву функцию трёх переменных?

**Задача 3.** Запишите формулами следующие высказывания:

- a) Последовательность  $\{a_n\}$  ограничена.
- b) Последовательность  $\{a_n\}$  неограничена.
- c) Последовательность  $\{a_n\}$  неограниченно возрастает (стремится к бесконечности).

**Задача 4.** Каково количество дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) от  $n$  переменных? (ДНФ - это булев многочлен, в котором роль сложения играет дизъюнкция, умножения - конъюнкция, а всякий моном состоит из конъюнкции некоторых переменных либо их отрицаний).