Дискретная математика I 2018, матфак ВШЭ

Семинар/листок 3. Вокруг индукции

Задача 1. Предъявите доказательства от противного следующих утверждений:

a) $\sqrt{2}$ – иррациональное число;

b) простых чисел бесконечно много.

Задача 2. Сформулируйте обратные теоремы к:

a) теореме Пифагора;

b) теореме Виета;

c) "основной теореме алгебры"существования комплексного корня у многочлена.

Верны ли они?

Задача 3. Выведите по индукции следующие формулы:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$;

б) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}$;

в) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Получите эти же формулы, представив каждое слагаемое в виде подходящей разности.

Задача 4. Попробуйте доказать по индукции неравенство $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$. А если его усилить: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$?

Задача 5. Покажите, что $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

Задача 6. Покажите, что $\underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}}_{n} < 2$.

Задача 7. Числа Фибоначчи F_n определяются условиями $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Докажите, что

а) $1,5^n < F_{n+2} < 2^n$, при $n \geq 1$;

б) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Задача 8. Верна ли теорема: "Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный"? Вот её доказательство (нет ли в нем ошибки?):

"1. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный (ясно).

2. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведем ещё один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на n+1 треугольник, причем один из двух новых треугольников будет не остроугольный. По индукции теорема доказана".

Задача 9. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем. Докажите, что для любого $n \geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида.

$$\text{Пример.} \qquad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \qquad (n = 3)\,.$$

Задача 10. На сколько частей делят плоскость n попарно пересекающихся окружностей, если никакие три окружности не проходят через одну и ту же точку? (Предполагается, что каждые две окружности пересекаются в двух *различных* точках).

Задача 11. * На сколько частей делят пространство n плоскостей в общем положении? Плоскости находятся в общем положении, если никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются по прямой и никакие четыре не пересекаются в одной точке.

Задача 12. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

(1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

(2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

(Пример: в последовательности $\underline{0}01\underline{1}001\ldots$ можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты). Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

Домашнее задание

Задачи 1–4 – письменно

Задача 1. Найдите и выведите индукцией и без нее явные формулы для сумм

а) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$;

б) $1^2+3^2+5+7+\ldots+(2n-1)^2$.

Задача 2. Докажите, что $2^{5n-2}+5^{n-1}\cdot3^{n+1}$ делится на 17 при любом натуральном n.

Задача 3. Число $x+\dfrac{1}{x}$ целое. Покажите, что $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ тоже целое при любом натуральном n.

Задача 4. Покажите, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких разных степеней двойки.

Задача 5. Пусть последовательность задана следующим образом:

$$u_1=2,\ u_2=3; \qquad u_n=3u_{n-1}-2u_{n-2} \qquad \text{при} \qquad n>2.$$

Покажите, что справедлива формула $u_n=2^{n-1}+1$.