Дискретная математика I 2018, матфак ВШЭ

Семинар 1

Необходимым условием сдачи темы являются: сдача письменной части домашнего задания и 8 задач из листка. Задача засчитывается при сдаче всех ее пунктов.

Задача 1. Докажите тождества:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Задача 2. Сколько различных выражений для множеств A, B, C можно составить с помощью операций $\cap, \cup$, и $\setminus$? (Выражения считаются одинаковыми, если они верны при всех значениях переменных, например $A \setminus (B \cap C)$ и $A \setminus (A \cap B \cap C)$ — одинаковы.);

Задача 3. Представьте на числовой прямой множества:

a) $[1, 3] \cup (2, 4)$;
b) $[-1, 1)\Delta(0, +\infty)$.

Задача 4. Представьте на декартовой плоскости множества:

a) $\{1, 2\} \times \{3, 4\}$;
b) $[-4, -5] \times \{12\}$.

Задача 5. Пусть A — множество решений уравнения $f(x) = 0$, а B — множество решений уравнения $g(x) = 0$ (всё — в $\mathbb{R}$). Выразите через A и B множество решений уравнения:

a) $f(x) \cdot g(x) = 0$;
b) $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$.

Задача 6. На острове 2/3 всех мужчин женаты и 3/5 всех женщин замужем (все браки — моногамные). Какая доля населения острова состоит в браке?

Задача 7. Решите систему $\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B \\ X \setminus A = C \setminus X \end{cases}$ (A, B, C — известны, нужно найти X).

Задача 8. У скольких отображений множества $\{a, b, c\}$ в себя существует обратное отображение?

Задача 9. Пусть $g(x) = \dfrac{2x}{e^x}$, $h(x) = \sin(x + \operatorname{tg} x)$. Запишите $(g \circ h)(x)$ и $(h \circ g)(x)$. Совпадают ли эти функции?

Задача 10. Исследуйте на инъективность и сюръективность функции:

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_3 x + 7x$;
b) $f : \mathbb{R} \to [-11, +\infty], \quad f(x) = x^2 + 6x - 2$;
c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2x - 5$;

Задача 11. Известно, что $g \circ h$ инъективна.

a) Можно ли утверждать, что g инъективна?
b) Можно ли утверждать, что h инъективна?

Домашнее задание 1

Все задания к следующему семинару. Задания 1, 2, 3 сдаются письменно.

Задача 1. Докажите тождества:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
b) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Задача 2. Представьте на числовой прямой множество $(1, 12) \setminus [3, 4]$.

Задача 3. Представьте на декартовой плоскости множество $[0, 1] \times (-\infty, -1]$.

Задача 4. Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов и во сколько раз?

Задача 5. Исследуйте на инъективность и сюръективность функции:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 5$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4\sin x - x^2$;
c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = x^3 - x + 1$;

Листок 1

Задача 1. Докажите тождество: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

Задача 2. Представьте на числовой прямой множество $[1, 12] \cap (3, 14)$.

Задача 3. Представьте на декартовой плоскости множество $[1, 2] \times (3, 4)$.

Задача 4. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше — доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

Задача 5. Решите систему $\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \end{cases}$ $(A, B, C$ – известны, нужно найти $X)$.

Задача 6. У скольких отображений множества $\{k, l, m, n\}$ в себя существует обратное отображение?

Задача 7. Пусть $|A| = a$, $|B| = b$.
Сколько существует отображений $A \to B$?
А сколько существует инъективных отображений $A \to B$?

Задача 8. Пусть $g(x) = x^2 + 3\sqrt{x}$, $h(x) = \log_2 \dfrac{x}{x-1}$. Запишите $(g \circ h)(x)$ и $(h \circ g)(x)$. Совпадают ли эти функции?

Задача 9. Исследуйте на инъективность и сюръективность функции:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x + 1$;
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -e^x - 3$;
(3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = \lfloor \sqrt{|x|} \rfloor \cdot (-1)^x$;

Задача 10. Пусть $f = g \circ h$.
a) Докажите, что если g и h инъективны, то и f инъективна.
b) Докажите, что если g и h сюръективны, то и f сюръективна.

Задача 11. Известно, что $g \circ h$ сюръективна.
a) Можно ли утверждать, что g сюръективна?
b) Можно ли утверждать, что h сюръективна?

Задача 12. * Сколько различных выражений для множеств $A_1, \ldots, A_4$ можно составить с помощью операций $\cap, \cup$, и $\setminus$?