Материалы к семинарам по матанализу (третий семестр)

3-я и 4-я недели (17–28.09.2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 3–4. Хаусдорфова размерность. Измеримые функции

1. Определение хаусдорфовой размерности
2. Её поведение при липшицевых и гёльдеровых отображениях
3. Канторова лестница
4. Измеримые функции
5. Сходимость поточечно, почти всюду

Примерные задачи семинаров

Хаусдорфова размерность

Задача 2.1. Докажите теорему 1 лекции 3: Мера Хаусдорфа множества X, $m_d(X)$, как функция от d ведет себя следующим образом: существует $d_* \leq 0$:

$$\forall d > d_*,\ m_d(X) = 0;\ \forall d < d_*,\ m_d(X) = \infty.$$

Задача 2.2. Докажите теорему 2 лекции 3: Множество положительной меры Лебега на отрезке $[0, 1]$ имеет хаусдорфову размерность 1.

Задача 2.3. Распространите 2 определения хаусдорфовой размерности на подмножества плоскости и докажите их эквивалентнтость.

Задача 2.4. Оцените сверху хаусдорфову размерность канторова совершенного множества.

Задача 2.5. Оцените сверху хаусдорфову размерность следующих множеств на прямой:
а) чисел без 7 в 16-ричной записи;
б) чисел без 7 и 9 в 16-ричной записи.

Задача 2.6. Для любого $d \in (0, 1]$ постройте множество хаусдорфовой размерности d на прямой.

Задача 2.7. Чему равна хаусдорфова размерность окружности на плоскости?

Задача 2.8. Существуют ли на плоскости множества хаусдорфовой размерности больше 2?

Задача 2.9. Докажите, что хаусдорфова размерность подмножества отрезка не меняется при диффеоморфизме отрезка.

Задача 2.10. Верно ли, что хаусдорфова размерность подмножества отрезка не меняется при гомеоморфизме отрезка, удовлетворяющем условию Липшица?

Измеримые функции

Задача 2.11. Пусть $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Докажите эквивалентность следующих определений измеримости функции f:
а) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) < c\}$ измеримо;
б) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) \leq c\}$ измеримо;
в) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) > c\}$ измеримо;
г) для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) \geq c\}$ измеримо;
д) для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(B)$ измеримо.

Задача 2.12. Пусть $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность измеримых функций. Докажите, что следующие функции также измеримы:
а) $\max(f_1, f_2)$ и $\min(f_1, f_2)$;
б) $\sup\limits_n(f_n)$ и $\inf\limits_n(f_n)$, при условии что $|f_n(x)| < C(x)$ для некоторой функции $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Задача 2.13. а) Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Докажите, что функция f^2 также измерима.
б) Приведите пример неизмеримой функции, квадрат которой измерим.

Задача 2.14. Пусть функции $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — измеримы. Докажите, что следующие функции также измеримы:
а) $f \pm g$; б) fg; в) f/g, при условии что функция g не обращается в ноль.

Задача 2.15. Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций.
а) Пусть $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для каждого x. Докажите, что функция f измерима.
б) Пусть $f_n(x) \to f(x)$ лишь почти всюду. Докажите, что f тем не менее измерима.
в) Докажите, что множество точек x, где предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ существует, измеримо.

Задача 2.16. Пусть функция $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ измерима. Докажите, что
а) множество точек x, в которых существует (конечная) производная $f'(x)$, измеримо.
б) функция f' измерима, если функция f дифференцируема на интервале $(0,1)$.

Определение 1. Функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ называется измеримой по Борелю (или *борелевской*), если для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(B)$ также является борелевским.

Задача 2.17. Докажите, что всякая непрерывная функция является борелевской, а всякая борелевская функция измерима.

Задача 2.18. а) Постройте гомеоморфизм, переводящий какое-нибудь множество меры ноль в неизмеримое множество.
Указание: «Подкрутите» канторову лестницу.
б) Постройте измеримую, но не борелевскую, функцию.

Задача 2.19. Пусть функции f_1, f_2 — борелевские, а функции g_1, g_2 — измеримые. Что можно сказать про измеримость по Лебегу и Борелю функций $f_1 \circ f_2$, $f_1 \circ g_1$, $g_1 \circ f_1$, $g_1 \circ g_2$?

Задача 2.20.* Докажите, что всякая измеримая функция эквивалентна некоторой борелевской функции (т.е. совпадает с ней везде, кроме множества меры ноль).

Задача 2.21 (C-свойство Лузина).* Пусть функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset [0,1]$ такое, что $\mu(F) > 1-\varepsilon$, где μ обозначает меру Лебега, и что ограничение функции f на множество F непрерывно.