

Классическая теория поля 2018.

Листок 2. Релятивистская механика

Срок сдачи: до 24 октября

Математический формализм

1. Тележка катится по столу с постоянной скоростью v . По тележке в том же направлении катится вторая тележка со скоростью v относительно первой. По второй тележке катится третья с той же скоростью v относительно второй и так далее. Определите скорость n -й тележки относительно стола.

2. Выведите релятивистский закон преобразования скоростей и ускорений при переходе в равномерно движущуюся (скажем, вдоль оси Ox) со скоростью v систему отсчета.

3. Линейный базис в алгебре Ли группы Лоренца задается шестью инфинитезимальными поворотами $L^{\mu\nu}$, $0 \leq \mu < \nu \leq 3$, затрагивающими по две из четырех координат пространства Минковского: x^μ и x^ν .

а) Постройте матрицы $L^{\mu\nu}$ и выразите коммутаторы $[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}]$ в виде линейных комбинаций матриц L .

Алгебра Ли группы Пуанкаре добавок к $L^{\mu\nu}$ имеет еще четыре базисных элемента P^μ , $0 \leq \mu \leq 3$, отвечающих трансляциям вдоль координатных осей x^μ .

б) Найдите коммутаторы элементов $L^{\mu\nu}$ и P^ρ .

4. Две модели релятивистской свободной частицы массы m задаются функционалами действия

$$\text{а) } S[\vec{x}(t)] = -mc^2 \int \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} dt, \quad \text{б) } S[x^\mu(\tau)] = -mc \int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} d\tau.$$

Здесь \vec{x} и x^μ – динамические переменные; t – реальное время ($x^0 = ct$); τ – формальный параметр вдоль мировой линии частицы $x^\mu(\tau)$.

Сравните модели релятивистской частицы, ответив для каждой из них на следующие вопросы:

а) Каково общее число уравнений Эйлера-Лагранжа, независимы ли они?

б) Проинтегрируйте один раз уравнения Эйлера-Лагранжа. Любые ли значения констант интегрирования при этом допустимы?

в) Проинтегрируйте уравнения Эйлера-Лагранжа второй раз. Единственно ли решение этих уравнений при заданных начальных данных $\{\vec{x}(0), \dot{\vec{x}}(0)\}/\{x^\mu(0), \dot{x}^\mu(0)\}$? Когда решения модели б) совпадают с решениями модели а)?

Физические эффекты

5. Зеркало движется перпендикулярно своей плоскости с постоянной скоростью v относительно источника света. В системе покоя источника света падающий луч направлен под углом θ к нормали зеркала.

а) Какой угол с нормалью к плоскости зеркала в этой системе образует отраженный луч света?

б) Как изменяется в той же системе отсчета энергия луча при отражении?

Подсказка: для ответа на этот вопрос удобно использовать связь энергии и 3-импульса свободной релятивистской частицы, известную под названием *дисперсионное соотношение*.

6. β -распад. Покоящийся нейтрон претерпевает, так называемый, β -распад, одним из продуктов которого является электрон. В системе покоя нейтрона направления вылета

электрона равновероятны, а модуль его 3-импульса равен P . В эксперименте наблюдают β -распад нейтрона, который движется относительно лаборатории со скоростью V .

а) Каково геометрическое место концов вектора импульса \vec{p} электрона в лабораторной системе отсчета?

б) При каком соотношении P и V наблюдатель в лабораторной системе не будет регистрировать вылета электронов под некоторыми углами относительно направления полета нейтрона?

7. Парадокс близнецов. Сопутствующей называется инерциальная система отсчета, в которой в данный момент времени наблюдаемый объект (скажем, частица) покоится в начале координат. При неравномерном движении объекта сопутствующие системы все время меняются. В релятивистской механике равноускоренным называется движение объекта, который в каждый момент времени испытывает постоянное 3-ускорение в сопутствующей системе отсчета.

В начальный момент времени покоившаяся в лабораторной системе ракета начинает равноускоренное движение с 3-ускорением a . Ракетой управляет один из близнецов, второй близнец наблюдает за ракетой, находясь в лабораторной системе.

а) Определите закон движения ракеты в лабораторной системе.

б) Сравните, как течет время для двух близнецов, т.е. найдите соотношение собственного времени ракеты с лабораторным.

8. Явление комптоновского рассеяния. Фотон частоты ν налетает на покоящийся электрон массы m и после столкновения движется под углом θ к направлению своего исходного импульса. Покажите, что частота ν' рассеянного фотона выражается формулой:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos \theta),$$

где c – скорость света, а h – постоянная Планка, которая связывает энергию фотона E с его частотой квантовомеханической формулой $E = h\nu$.

9. Кинетической энергией релятивистской частицы массы m называется разность ее полной механической энергии и энергии покоя: $T = cP^0 - mc^2$.

Какую минимальную кинетическую энергию необходимо придать двум протонам, чтобы стала возможной реакция рождения антипротона: $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$ (массы покоя протона и антипротона совпадают)? Воспользовавшись законом сохранения 4-вектора энергии-импульса системы частиц, решите задачу в двух случаях:

а) один из взаимодействующих протонов является мишенью, т.е., он неподвижен перед столкновением;

б) реагируют встречные пучки протонов, т.е., протоны налетают друг на друга со скоростями, одинаковыми по величине и противоположными по направлению.