1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

Вернемся еще раз к теме интегралов движения.

3.1 Момент импульса

Применим теорему Нетер к вращательной симметрии задачи о движении в центрально-симметричном поле

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - U(|\mathbf{x}|) \tag{1}$$

для определенности – в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Симметрия задачи очевидна [1] – инвариантность лагранжиана относительно группы поворотов $O(3)$ или преобразований

$$\delta x_i = \chi_i(\mathbf{x}) = \epsilon_{ijk} x_j \delta\varphi_k \tag{3}$$

из алгебры Ли $\mathfrak{g} = so(3) \simeq su(2)$, генерируемых векторными полями

$$V_i = -\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad [V_i, V_j] = \epsilon_{ijk} V_k \tag{4}$$

В этих формулах $\{\epsilon_{ijk}\}$ – набор компонент полностью антисимметричного тензора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, а также – структурных констант алгебры Ли, генерирующей его повороты [2].

[1] Действительно, мы уже рассматривали вращение в двумерной плоскости, которое описывается формулами

$$\delta x_1 = \epsilon \cdot x_2 + o(\epsilon), \qquad \delta x_2 = -\epsilon \cdot x_1 + o(\epsilon) \tag{2}$$

которое является частным случаем данной формулы при $\delta\varphi_j = \epsilon\delta_{j3}$.

[2] Можно сказать, что на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ можно задать структуру алгебры Ли (чем мы еще будем неоднократно пользоваться в дальнейшем), которая действует на себе присоединеным образом – поворотами.

Буквальное применение теоремы Нетер сразу дает три интеграла движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\chi_i(\mathbf{x})\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\epsilon_{ijk}\delta\varphi_j x_k\right) = \sum_j \delta\varphi_j \frac{d}{dt}M_j = 0$$
$$M_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k \tag{5}$$

которые являются компонентами вектора $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Этот факт совершенно очевиден и непосредственно из уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$$
$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = -U'(|\mathbf{x}|)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \tag{6}$$

откуда следует, что

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = m\frac{d}{dt}\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = m\frac{d}{dt}\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} \underset{(6)}{=} 0 \tag{7}$$

Сохранение момента импульса $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, который перпендикулярен радиус-вектору частицы $\mathbf{x}$, означает, что движение происходит все время в плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, перпендикулярной моменту $\mathbf{x} \cdot \mathbf{M} = 0$, а значит задача редуцируется в $D = 2$. Записав лагранжиан в полярных координатах

$$L = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r) \tag{8}$$

становится очевидным, что $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$, а значит соответствующий (обобщенный) импульс

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = M = \mathrm{const} \tag{9}$$

является интегралом движения $\frac{dM}{dt} = 0$.

Очевидно также, что в данной системе сохраняется энергия

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + U(r) = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{10}$$

т.е. избавившись от угловой координаты мы видим, что система стала эквивалентной одномерной системе (на полупрямой $0 < r < \infty$) с потенциалом $U_{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$, куда вносит вклад “центробежная энергия” $U_c(r) = \frac{M^2}{2mr^2}$.

3.2 Задача Кеплера

Геометрический смысл формулы (9) представляет собой *второй закон Кеплера*, утверждающий, что "секториальная скорость" при движении в центральном поле сохраняется – где площадь сектора, заметаемого радиус-вектором при движении за бесконечно малый интервал времени dt

$$\tfrac{1}{2}r \cdot r d\phi = \frac{M}{2m} dt \tag{11}$$

Законы сохранения (9) и (10) при интегрировании дают

$$\begin{aligned} t = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \\ \phi = \frac{M}{m} \int \frac{dt}{r^2} = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \end{aligned} \tag{12}$$

явное решение (в смысле, который мы уже обсуждали) поставленной задачи: обратные функции к динамике $r(t)$ и форме траектории в плоскости $r(\phi)$.

При задаче движения в ньютоновском или кулоновском притягивающем потенциале $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$ (собственно "задаче Кеплера")

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{13}$$

имеет очевидные асимптотические свойства

$$U_{\text{eff}}(r) \underset{r\to 0}{\to} \infty_+, \qquad U_{\text{eff}}(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0_- \tag{14}$$

и единственный минимум $U'(r_*) = 0$ при

$$r_* = \frac{M^2}{\alpha m}, \qquad U_* = U(r_*) = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2} \tag{15}$$

Уравнения (12) в данном случае интегрируются в явных функциях, что дает например

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}}} = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \phi_0 \tag{16}$$

где константа интегрирования – просто начало отсчета угла. Это уравнение явно переписывается в виде конического сечения (легко убедиться, переписав в декартовых координатах!) с фокусом в начале координат (3-й закон Кеплера?)

$$\frac{A}{r} = 1 + \gamma \cos\phi \tag{17}$$

где $A = \frac{M^2}{m\alpha}$ – параметр, а $\gamma = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ – эксцентриситет орбиты.

- При минимальной энергии $E = U_* = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$ эксцентриситет $\gamma = 0$, и это движение по окружности с радиусом $r = r_* = 1/A$;
- При отрицательных энергиях $U_* \leq E < 0$ движение финитно, траектория – эллипс;
- При $E = 0$ получим $\gamma = 1$ и движение по параболе;
- При $E > 0$ имеем $\gamma > 1$ и движение по гиперболе.

3.3 Смена парадигмы

Ну а пусть теперь $U(r) = 0$, и радиальное одномерное движение происходит в потенциале

$$U_{\text{eff}}(r) = U_c(r) = \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{g}{r^2}, \quad g = \frac{M^2}{2m} > 0 \tag{18}$$

Это случай интегрируемого потенциала уже упомянутой *модели Калоджеро*, в данном случае – на полупрямой $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Ожидаемо уравнения (12) интегрируются с результатом

$$t = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_c(r)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{rdr}{\sqrt{Er^2 - g}} \tag{19}$$

или попросту

$$r = \sqrt{\frac{g}{E} + \frac{2E}{m}t^2} \tag{20}$$

Что и естественно было ожидать: ответ представляет собой траекторию движения *свободной* частицы в двумерной плоскости: прямую

$$\begin{gathered} x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t \\ v_x^2 + v_y^2 = \frac{2E}{m} \end{gathered} \tag{21}$$

а константа взаимодействия $g = \frac{M^2}{2m}$ связывается при этом с дополнительным интегралом движения. При этом важно, что

- Движение в системе интегрируемым потенциалом возникает как редукция *свободного* движения в большем числе измерений;
- Это свойство модели Калоджеро сохраняется и для систем многих частиц с потенциалами, имеющими полюс второго порядка:

$$U_c(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{\sin^2(x)}, & x \in S^1 \\ \wp(x), & x \in T^2 \end{cases} \tag{22}$$

Многие свойства интегрируемых систем имеют рациональное, тригонометрическое и эллиптическое воплощения – и при этом ... не продолжаются дальше.

3.4 Принцип наименьшего действия

Сегодня при решении задач мы пользовались, в основном, интегралами движения. Вспомним однако, что мы находимся в картине лагранжевой механике, и проверим еще раз “на прочность” принцип наименьшего действия.

Итак, мы выяснили, что свободное движение в двумерии с функцией Лагранжа в полярных координатах

$$L = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) \tag{23}$$

приводит к сохранению момента импульса $M = mr^2\dot{\phi} = \mathrm{const}$ и при редукции на радиальное направление к эффективному одномерному движению с энергией $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2}$, сохраняющейся на уравнениях одномерного движения в отталкивающем потенциале Калоджеро, т.е.

$$m\ddot{r} = -U_c'(r) = \frac{M^2}{mr^3} \tag{24}$$

с константой $g = \frac{M^2}{2m} > 0$.

Ну а почему бы не воспользоваться прямо лагранжевой формулировкой? Уравнения ЭЛ для (23)

$$\begin{aligned} &m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 \\ &\frac{d}{dt}mr^2\dot{\phi} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

и решив второе в виде $\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}$, и подставив это решение прямо в лагранжиан мы получаем

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{mr^3} \\ L_{\mathrm{eff}} &= \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} \end{aligned} \tag{26}$$

т.е. ту же систему Калоджеро (24), но ... с другим ($m\ddot{r} = -\frac{M^2}{mr^3}$) знаком?!

- Вроде бы очевидно физически, что правильным уравнением является (24), так как центробежная сила должна отталкивать, а не притягивать.
- Как же тогда быть с принципом наименьшего действия?

Правильный ответ – *аккуратно*. Вспомним, что мы варьируем действие на траектории, и должны добиваться вообще говоря зануления не только интегрального, но и граничных вкладов. Это означает, в том числе, что решая уравнение на угол, следует аккуратно написать

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}, \qquad \phi(t) = \frac{M}{m}\int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)} + \phi_0 \tag{27}$$

а стало быть константа M фиксируется условием

$$\phi_1 - \phi_0 = \frac{M}{m} \int_0^T \frac{d\tau}{r^2(\tau)} \tag{28}$$

и при фиксированных граничных значениях угла (или их разности $\theta = \phi_1 - \phi_0$)

$$M = \frac{m\theta}{\int_0^T \frac{dt}{r^2}} = M[r] \tag{29}$$

сама становится нетривиальным *функционалом* координаты $r(t)$ на траектории. Подстановка последнего равенства в действие дает

$$\begin{gathered} L_{\text{eff}} = \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} = \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{m\theta^2}{2r^2} \left(\frac{1}{\int_0^T \frac{dt}{r^2}} \right)^2 \\ S_{\text{eff}} = \int_0^T dt L_{\text{eff}} = \int_0^T dt \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{m\theta^2}{2\int_0^T \frac{dt}{r^2}} \end{gathered} \tag{30}$$

довольно неожиданный неполиномиальный функционал (со знаменателем!).

Первый философский вывод таков:

- Все что говорилось о свойствах действия (интеграл от функции Лагранжа, степени не выше двух по первым производным итп) верно только для фундаментальных систем;
- При построении эффективных действий (“интегрировании” по части переменных) это свойство нарушается уже в простейших примерах: эффективные действия могут быть какими угодно;
- Принцип наименьшего действия верен даже там, где нельзя пользоваться уравнениями ЭЛ (это, конечно, еще надо проверить!), т.к. в последней формуле нет “нормального лагранжиана”.

Варьируя (но не пользуясь уравнениями ЭЛ!), получаем (с точностью до граничных членов)

$$\begin{gathered}
\delta S_{\text{eff}} = \int_0^T dt m\dot{r}\delta\dot{r} - \frac{m\theta^2}{2\left(\int_0^T \frac{dt}{r^2}\right)^2}\int_0^T (-2)\frac{dt}{r^3}\delta r = \\
= -\int_0^T dt m\ddot{r}\delta r + \frac{m\theta^2}{\left(\int_0^T \frac{dt}{r^2}\right)^2}\int_0^T \frac{dt}{r^3}\delta r = \\
= -\int_0^T dt m\ddot{r}\delta r + \frac{M^2}{m}\int_0^T \frac{dt}{r^3}\delta r = \int_0^T dt\delta r\left(-m\ddot{r} + \frac{M^2}{m}\frac{1}{r^3}\right)
\end{gathered} \tag{31}$$

или просто – *правильные* уравнения движения. Принцип наименьшего действия работает!