

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА 2018
Листок 1

1. Вычислите действие на классической траектории гармонического осциллятора лагранжианом

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}$$

как функцию начального и конечного положений q_0, q_1 и времени прохождения T .

2. Найдите траекторию минимизирующую время прохождения частицы из точки $(0, a)$ в точку $(1, -b)$ в плоскости (x, y) для $a, b > 0$ при условии, что модуль скорости её равен v_+ при $y > 0$ и v_- при $y \leq 0$.

3. Найдите закон сохранения (зависящий от времени) в системе с лагранжианом

$$L = e^{|\alpha|t} \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{|k|q^2}{2} \right)$$

и выведите из него предельное поведение решений $q(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

4. Выпишите уравнения движения для лагранжиана

$$L = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

i, j – индексы, а не степени.

5. Найдите законы сохранения системы с лагранжианом

$$L = \frac{m(5\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2)}{2} - \alpha \cdot (2x - y + 1)^2$$

6. Найдите функцию Лагранжа и уравнения движения для математического маятника в однородном поле тяжести с изменяющейся по закону $l = l(t)$ длиной маятника.

7. Посмотрев где-нибудь решение задачи о брахистохроне (для плоской земли с однородным полем тяжести) и гравитационный потенциал однородного шарового слоя решите в лагранжевом формализме аналог задачи о брахистохроне для движения без трения по туннелям внутри земли с однородным распределением массы, соединяющим точки поверхности земли.