Листок 2.

Задача 1. Пусть задана система линейных комплексных уравнений $AX = b$ с обратимой квадратной $(n \times n)$-матрицей A. Предположим, что сумма модулей элементов каждой строки матрицы $E + A$ меньше 1. Пусть $X_0 \in \mathbb{C}^n$ - произвольный столбец и индуктивно определим $X_{m+1} = (A + E)X_m - b$. Докажите, что последовательность столбцов X_m сходится к решению уравнения $AX = b$.

Задача 2. Образуют ли многочлены а) $(x-k)^n$ б) $\binom{x}{k}$ (где $0 \leqslant k \leqslant n$) базис в пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n с рациональными коэффициентами?

Задача 3. Найдите размерность пространства
а) многочленов степени $\leqslant n$ от m переменных,
б) однородных многочленов степени d от m переменных,
в) однородных симметрических многочленов степени 10 от 4 переменных,
г) симметрических многочленов степени $\leqslant 3$ от 4 переменных.

Задача 4. В задаче 4 листка 1 доказывалось, что для трех подпространств U, V, W векторного пространства имеет место включение подпространств: $(U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U) \subseteq (U + V) \cap (V + W) \cap (W + U)$, Приведите два примера таких подпространств, для которых это включение является собственным, т. е. когда левая часть этого включения не совпадает с правой.

Задача 5. (а) Определите на множестве 2^M подмножеств (конечного) множества M структуру векторного пространства над $\mathbb{F}_2$, если операция сложения задана посредством симметрической разности: $X + Y := (X \smallsetminus Y) \cup (Y \smallsetminus X)$.
(б) Выберите базис и вычислите размерность этого векторного пространства.
(в) Пусть подмножества $M_1, ..., M_k$ таковы, что ни одно из них не содержится в объединении остальных. Докажите, что они линейно-независимы. Верно ли обратное?
(г) Докажите, что операция пересечения $X \mapsto X \cap Y$ с заданным подмножеством Y задает линейный оператор, и вычислите его ранг.

Задача 6. Даны два коммутирующих линейных оператора A и B в конечномерном комплексном векторном пространстве. Докажите, что существует базис, в котором матрицы обоих операторов верхние треугольные.

Задача 7. (а) Пусть заданы линейные отображения векторных пространств $f : V_1 \to V_3,\ g : V_1 \to V_2$. Когда существует такое линейное отображение $h : V_2 \to V_3$, что $f = h \circ g$?
(b) Пусть заданы линейные отображения векторных пространств $f : V_1 \to V_3,\ g : V_2 \to V_3$. Когда существует такое линейное отображение $h : V_1 \to V_2$, что $f = g \circ h$?

Задача 8. Найдите все инвариантные подпространствпа линейного оператора, заданного в стандартном базисев $\mathbb{R}^4$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Даны две матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbf{k})$ и $B \in M_{n \times m}(\mathbf{k})$, где $m \leqslant n$. Докажите, что отношение характеристического многочлена матрицы BA к характеристическому многочлену матрицы AB равно x^{n-m}.

Задача 10. Вещественная $(2n \times 2n)$-матрица называется *симплектической*, если $A^t J_{2n} A = J_{2n}$, где $J_{2n} = \left(\begin{smallmatrix} O & -E_n \\ E_n & O \end{smallmatrix}\right)$. Докажите, что всякая симплектическая матрица $A \in \mathrm{Sp}(2n)$ обладает следующими свойствами:
а) $\det A = 1$;
б) характеристический многочлен $f(t)$ матрицы A является возвратным, то есть $f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t^{2n}} f(t)$.