1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Уравнения Гамильтона

Перейдем, наконец, собствено – к формализму Гамильтона.

4.1 Преобразование Лежандра

Вспомним как мы строили интеграл энергии для консервативной системы, хотя для того, что сейчас будет проделано совершенно необязательно, чтобы $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

- Для каждой обобщенной координаты (на многообразии M) введем ее канонический импульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

  По теореме о неявной функции эти уравнения можно разрешить относительно скоростей, если матрица гессиана

$$h_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{2}$$

  является невырожденной $\det h \neq 0$. Поэтому лагранжианы с невырожденным гессианом называют также невырожденными: очевидный пример положительно определенного невырожденного гессиана $h_{ij}(q, \dot{q}) = g_{ij}(q)$ – риманова метрика на M.

- Построим функцию Гамильтона по формуле, которой мы пользовались для интеграла энергии

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{3}$$

и которая (в более общем контексте) называется преобразованием Лежандра.

Важнейшей для дальнейшего формулой является *дифференциал* преобразования Лежандра

$$\begin{aligned} dH = d\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - L\right) = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) = \\ \underset{(1)}{=} \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Из "мастер-формулы" (4) следует практически все, что мы можем сказать о преобразовании Лежандра, а также о функции и уравнениях Гамильтона. Последнее замечание здесь – по циклическим координатам никакого преобразования делать и не нужно.

4.2 Канонические уравнения Гамильтона

Из формулы (4) немедленно следует

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \dots, N \tag{5}$$

а второе слагаемое в правой части на уравнениях ЭЛ дает

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6}$$

т.е. его можно переписать в виде

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \dots, N \tag{7}$$

Таким образом система уравнений ЭЛ может быть переписана в виде системы уравнений *первого* порядка (5), (7). Одной из изначальных целей гамильтонова формализма было желание переписать уравнения ЭЛ второго порядка в виде системы уравнений первого порядка, что и сделано в формулах (5), (7), как говорят на *фазовом* пространстве с координатами (p, q). Отметим, что более точно канонические уравнения Гамильтона следует писать как

$$\dot{q} = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_q, \qquad \dot{p} = -\left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_p \tag{8}$$

т.е. функцию Гамильтона - энергию надо выразить через координаты и импульсы [1]. Это также является естественным следствием "мастер-формулы" (4), в которой dH разлагается в линейную комбинацию именно dq и dp (а не дифференциалов скоростей).

Заметим еще раз, что при выводе нигде на самом деле не использовалась независимость *коэффициентов* лагранжиана от времени, поэтому все формулы остаются верными при $L = L(q, \dot{q}; t)$. При этом конечно возникает явно зависящая от времени функция Гамильтона $H = H(p, q; t)$, полная производная по времени которой

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \underset{(5),(7)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} \tag{9}$$

равна частной производной в силу канонических уравнений Гамильтона. При независимости от времени функции Лагранжа (а стало быть и Гамильтона) мы получаем из (9) закон сохранения энергии.

4.3 Примеры

Для лагранжиана движения в потенциальном поле имеем стандартным образом

$$\begin{gathered} L(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 - U(q) \\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \\ h_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = m\delta_{ij} \end{gathered} \tag{10}$$

[1] "Упорядочение" (p, q) – алфавитный порядок, хотя казалось бы q главнее p. В дальнейшем мы поймем, что это – несущественно, т.к. в гамильтоновом формализме разности между p и q фактически нет.

т.е. гессиан невырожден (в общем случае – массовая матрица или метрика $m_{ij} = g_{ij}(q)$), поэтому уравнения на скорости элементарно разрешаются

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \tag{11}$$

через обратную массовую матрицу. Таким образом, очевидно получаем

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \tag{12}$$

гамильтониан для частицы в потенциальном поле, приводящий к каноническим уравнениям

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial q} \tag{13}$$

первое из которых в данном случае банально совпадает с (11). Для произвольной метрики (или массовой матрицы) имеем

$$H(p,q) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}(q)p_i p_j + U(q) = \tfrac{1}{2}\langle p,p\rangle_g + U(q) \tag{14}$$

где скалярное произведение в пространстве импульсов V^* (например, слое T^*M) определяется *обратной* матрицей к римановой метрике, определяющей скалярное произведение в пространстве V (слое TM) касательных векторов или скоростей.

В случае магнитного поля

$$\begin{aligned} L(q,\dot{q}) &= \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + A_i(q)\dot{q}_i \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + A_i(q) \end{aligned} \tag{15}$$

и решение для скоростей имеет вид

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m}\left(p_i - A_i(q)\right) = \frac{1}{m}P_i \tag{16}$$

Функция Гамильтона при этом имеет вид

$$H(p,q) = \frac{P^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p - A(q)\right)^2 \tag{17}$$

такой же как у *свободной* частицы, но со сдвинутым на вектор-потенциал импульсом (16). Это важнейшее свойство "минимальности" электромагнитного взаимодействия ("удлинение" импульса, или, после квантования – производной), и оно универсально для всех проявлений электромагнитного (а также и неабелева калибровочного) поля в природе.

4.4 Геометрический смысл

С геометрической точки зрения преобразование Лежандра (3) строит по функции Лагранжа $L(q,\dot q) : TM \mapsto \mathbb{R}$ на касательном расслоении функцию Гамильтона $H(q,p) : T^*M \mapsto \mathbb{R}$ на *кокасательном* расслоении. Действительно, импульсы (1) можно рассматривать как компоненты вектора в двойственном к касательному пространстве, а саму формулу (3) переписать в виде

$$
\begin{aligned}
H(p,q) = \left(\sum_i p_i \dot q_i - L(q,\dot q)\right)_{\dot q = \dot q(q,p)} &= \\
= \sup_v \left(\langle p, v\rangle - L(q,v)\right)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $v \in V$ – элемент касательного слоя, а скобка задает спаривание между касательным слоем и ему двойственным пространством ($p \in V^*$) – линейных функционалов на V. Кокасательное расслоение T^*M и является (в данном случае!) фазовым пространством $\mathcal{M}$ динамической системы с функцией Гамильтона (3). Последнее равенство в (18) означает всего лишь, что $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ и что матрица $h_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} > 0$ положительно определена.

Преобразование Лежандра (для хорошего класса лагранжианов и гамильтонианов) является *инволюцией*

$$
L \overset{\mathcal{L}}{\to} H \overset{\mathcal{L}}{\to} L \tag{19}
$$

Действительно, формулу (3) можно переписать в виде

$$
L = \sum_i p_i \dot q_i - H \tag{20}
$$

дифференциал которой

$$
\begin{aligned}
dL = \sum_i \left(p_i d\dot q_i + \dot q_i dp_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i\right) = \\
\underset{(5)}{=} \sum_i \left(p_i d\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) \underset{(1)}{=} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

в силу канонических уравнений очевидным образом совпадает с дифференциалом функции Лагранжа.

4.5 Принцип наименьшего действия

Из свойств преобразования Лежандра следует, что принцип наименьшего действия можно переформулировать в форме Гамильтона. Для действия имеем

$$S = \int_0^T dtL = \int_0^T dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p) \right) \tag{22}$$

Вариация действия в этой форме немедленно приводит к каноническим уравнениям Гамильтона (5), (7)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^T dt \sum_i \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \\ &= \int_0^T dt \sum_i \left(\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) + \sum_i p_i \delta q_i \Big|_0^T \end{aligned} \tag{23}$$

следующими из зануления интеграла вдоль траектории при произвольных вариациях δq и δp, дополненым граничными условиями

$$\delta q_i|_0^T = 0, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{24}$$

только на координаты (но не на импульсы). Это обстоятельство окажется довольно существенным в квантовой механике.

4.6 Принцип Мопертюи и геодезические

Для консервативной системы, т.е. когда энергия сохраняется, принцип наименьшего действия можно переформулировать или упростить. Действительно, на уравнении

$$H(p,q) = E = \mathrm{const} \tag{25}$$

гамильтоново действие (22) можно переписать как

$$S = \int_0^T dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p) \right) = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i - ET \tag{26}$$

и экстремали действия на траекториях с постоянной энергией совпадают с траекториями "укороченного действия"

$$S_0 = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \int_{q_0}^{q_T} \sum_i p_i dq_i \tag{27}$$

определенного как интеграл на гиперповерхности (единичной коразмерности) или $(2N-1)$-мерной поверхности (25) в фазовом-пространстве.

Из этого следует принцип Мопертюи, который довольно странным образом обобщает науку о геодезических. Вспомним общий вид квадратичного по производным лагранжиана

$$L_g = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{28}$$

вариация которого приводит к уравнению геодезической. То же самое уравнение возникает при вариации действия

$$S_g = \int_0^T dt \sqrt{g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j} = \int_{q_0}^{q_T} \sqrt{g_{ij}(q) dq_i dq_j} \tag{29}$$

являющимся просто геометрической длиной траектории. Какая связь у этого с (27)?

Напишем условие (25) для квадратичной теории в потенциале

$$\tfrac{1}{2} \sum_i p_i \dot{q}_i + U(q) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q) = E \tag{30}$$

которое можно переписать в виде

$$dt = \frac{\sqrt{g_{ij}(q) dq_i dq_j}}{\sqrt{2(E - U(q))}} \tag{31}$$

откуда

$$\begin{aligned} S_0 = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \int_{q_0}^{q_T} \frac{g_{ij}(q) dq_i dq_j}{dt} = \\ = \int_{q_0}^{q_T} \sqrt{2(E - U(q)) g_{ij}(q) dq_i dq_j} \end{aligned} \tag{32}$$

т.е. минимизация укороченного действия эквивалентна поиску геодезических для многообразия с эффективной метрикой

$$G_{ij}^{\text{eff}}(q) = (E - U(q)) g_{ij}(q) \tag{33}$$

Похожие рассуждения возникают и в релятивистской механике.

4.7 Симплектическая геометрия фазового пространства

Кокасательное расслоение T^*M являлтся примером симплектического многообразия: четномерного многообразия ($\dim T^*M = 2N$, если $\dim M = N$), оснащенного замкнутой 2-формой – в данном случае

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i, \qquad d\omega = 0 \tag{34}$$

где $d = dq_i \frac{\partial}{\partial q_i} + dp_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ – внешний дифференциал на T^*M. Координаты (p,q) называются при этом координатами Дарбу.

Определение: Симплектическим многообразием называется четномерное многообразие $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = 2N$, оснащенное невырожденной замкнутой, положительно определенной 2-формой ω:

$$d\omega = 0, \qquad \det \omega \neq 0, \qquad \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{N} > 0 \tag{35}$$

Примеры:

- $\mathcal{M} = T^*M$, в частности $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$ с формой $\omega = \sum_{i=1}^N dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$;
- $\mathcal{M} = S^2$, $\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$. Этот пример (как и все с $N = 1$!) банален, но существенен, так как двумерная сфера S^2 *не* является кокасательным расслоением к чему-бы то ни было (признак "квантовости"!).
- Обобщение предыдущего примера на $N > 1$ уже не вполне тривиально: $\mathcal{M} = \mathbb{P}^N$ – комплексное проективное пространство с симплектической формой

$$\omega = \frac{i}{2} \frac{\sum_{i=1}^N dz_i \wedge d\bar{z}_i}{\left(1 + \sum_{j=1}^N |z_j|^2\right)^2} \tag{36}$$

являющейся вещественной частью кэлеровой формы Фубини-Штуди.

Задача: Написать явно матрицу симплектической формы на $\mathcal{M} = T^*M$ в координатах Дарбу

$$\|\omega\| = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{37}$$

где, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ – “очевидные” матрица размера $N\times N$. Очевидно, что обратная матрица существует, и совпадает с ней – с точностью до знака

$$\|\Omega\| = \|\omega\|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

а канонические уравнения Гамильтона на координаты $\{x\} = \{(p,q)\}$ можно переписать в виде

$$\dot{x} = \xi_H(x) = \Omega dH, \qquad \text{or} \quad \dot{x}^i = \xi_H^i(x) = \sum_j \Omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{39}$$

где dH – дифференциал функции Гамильтона на фазовом пространстве.

Геометрический смысл уравнения (39) очень простой, производная координаты на фазовом пространстве задается векторным полем “специального вида”, выражающимся через производную некоторой функции $H = H(x)$ на $\mathcal{M}$. Такие векторные поля называются гамильтоновыми.

4.8 Теорема Лиувилля

Рассмотрим любую область в фазовом пространстве $D \subset \mathcal{M}$ и ее объем

$$V = \int_D dx = \int_D dpdq \tag{40}$$

Назовем гамильтоновым потоком однопараметрическую группу преобразований $U_t : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$

$$U_t : (p,q) \mapsto (p(t), q(t)) \tag{41}$$

фазового пространства, генерируемую каноническими уравнениями Гамильтона (5), (7) или (39).

Теорема Лиувилля (одна из многих его имени!): Объем любой области фазового пространства сохраняется при гамильтоновой динамике.

Действительно, для производной объема верно соотношение

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = \int_D \mathrm{div}\xi_H dx \tag{42}$$

следующее из разложения

$$x(t) = U_t x = x + t\xi_H + O(t^2) \tag{43}$$

при $t \to 0$ и формулы для якобианов

$$V(t) = \int_{D(t)} dx(t) = \int_D \frac{\partial x(t)}{\partial x} dx = \int_D (1 + t\mathrm{div}\xi_H)\, dx + O(t^2) \tag{44}$$

где

$$\mathrm{div}\xi_H = \sum_i \frac{\partial \xi_H^i}{\partial x^i} \tag{45}$$

поскольку для любой матрицы A

$$\det(1 + tA) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\mathrm{Tr}A + O(t^2) \tag{46}$$

Для гамильтонова векторного поля (39) (например, в координатах Дарбу) очевидно, что $\sum_i \frac{\partial \xi_H^i}{\partial x^i} = 0$.

Вообще, поскольку гамильтоновы потоки сохраняют симплектическую форму (проверить!)

$$\omega(t) = \sum_i dp_i(t) \wedge dq_i(t) = \sum_i dp_i \wedge dq_i = \omega \tag{47}$$

то сохряняются все, выраженные через нее, "интегральные величины".