КОМБИНАТОРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Разбиение чисел на слагаемые

Π_N^n – количество разбиений числа N на натуральные слагаемые, не превосходящие n (разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются совпадающими).

Π_N^N – количество всевозможных разбиений числа N на натуральные слагаемые.

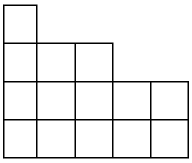
Примеры: $\Pi_N^1 = 1$; $\Pi_{2N}^2 = N + 1 = \Pi_{2N+1}^2$

Рекуррентное соотношение $\Pi_N^n = \Pi_{N-n}^n + \Pi_N^{n-1}$.

Пример: Π_{10}^3.

Графическая иллюстрация разбиения: диаграмма Эйлера.

14=4+3+3+2+2=5+5+3+1



Утверждение 1. Количество разбиений числа N на натуральные слагаемые, не превосходящие n, совпадает с количеством разбиений числа N, содержащих не более n слагаемых.

Утверждение 2. Количество разбиений числа N, содержащих не более n слагаемых, совпадает с количеством разбиений числа N+n, содержащих ровно n слагаемых

Числа Стирлинга

Вопрос: сколько существует разбиений четырёхэлементного множества на два непересекающихся подмножества?

Число Стирлинга S_n^k равно количеству различных разбиений n-элементного множества на k непустых непересекающихся подмножеств.

Замечание. Два разбиения множества считаются различными, если найдутся два элемента множества, которые при первом разбиении содержатся в одном подмножестве, а при втором в различных.

Вопросы для обсуждения.

1. Найти S_n^1, S_n^2, S_n^n.
2. Найти S_5^3. Наводящее соображение: если мы умеем разбивать четырёх элементные подмножества, то как подложить к ним пятый элемент?

Основное рекуррентное соотношение для вычисления чисел Стирлинга: $S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k$.

Оно позволяет выписать числа Стирлинга в своеобразный треугольник, напоминающий треугольник Паскаля.

Упражнение. Выписать четвёртую строку треугольника Стирлинга (треугольник начинается с нулевой строки).

Числа Каталана

Бинарные операции бывают ассоциативные и неассоциативные (например, вычитание и деление). Это приводит к следующей задаче.

Задача. Найти количество c_n способов расстановки скобок, корректно определяющих порядок действий в выражении $x_1 x_2 \dots x_n$.

Последовательность: 1,1, 2, 5, 14…

Рекуррентное соотношение: $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \dots + c_nc_0$.

Другие иллюстрации.

А) Количество разбиений (n+2)-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями.

Б) Имеется n символов 1 и столько же символов -1. Сколько существует способов расставить их так, что сумма любых нескольких первых слагаемых была неотрицательна?

Основная формула $c_n = \dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$.

Комбинаторные последовательности

1. Количество клеток в диаграмме Эйлера-Юнга называется её весом. Сколько существует диаграмм веса 7?
2. Говорим, что одна диаграмма Эйлера-Юнга мажорирует другую (с тем же числом столбцов), если любые несколько первых столбцов первой содержат не меньше клеток, чем столько же столбцов второй. При каком наименьшем s найдутся две диаграммы с одним число столбцов, ни одна из которых не мажорирует другую?
3. Докажите, что количество разбиений натурального числа на чётные слагаемые равно количеству разбиений, в которых каждое слагаемое входит чётное число раз.
4. Пусть $P_{k,l}(n)$ – количество разбиений числа n на не более k слагаемых, каждое из которых не превосходит *l*. Докажите, что $P_{k,l}(n) = P_{k,l}(kl-n)$
5. Докажите, что $P_{k,l}(0) + P_{k,l}(1) + \ldots + P_{k,l}(kl) = C_{k+l}^{k}$
6. Сколькими способами можно разбить 5-элементное множество на непересекающиеся подмножества?
7. Количество способов, которыми можно разбить n-элементное множество на непересекающиеся подмножества $B_n = \sum_{k=1}^{n} S_n^k$, называется число Белла. Докажите рекуррентное соотношение $B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k B_k$. Используя эту формулу, найдите B_6.
8. Используя формулу для числа сюрьекций, получите явное (хоть и очень громоздкое) выражение для чисел Стирлинга.
9. Пусть V_k – пространство многочленов степени не выше k от переменной *x*. Выпишите матрицу перехода от базиса $\{1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\ldots(x-k+1)\}$ к базису $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$.

Комбинаторные последовательности

1. Количество клеток в диаграмме Эйлера-Юнга называется её весом. Сколько существует диаграмм веса 7?
2. Говорим, что одна диаграмма Эйлера-Юнга мажорирует другую (с тем же числом столбцов), если любые несколько первых столбцов первой содержат не меньше клеток, чем столько же столбцов второй. При каком наименьшем s найдутся две диаграммы с одним число столбцов, ни одна из которых не мажорирует другую?
3. Докажите, что количество разбиений натурального числа на чётные слагаемые равно количеству разбиений, в которых каждое слагаемое входит чётное число раз.
4. Пусть $P_{k,l}(n)$ – количество разбиений числа n на не более k слагаемых, каждое из которых не превосходит *l*. Докажите, что $P_{k,l}(n) = P_{k,l}(kl-n)$
5. Докажите, что $P_{k,l}(0) + P_{k,l}(1) + \ldots + P_{k,l}(kl) = C_{k+l}^{k}$
6. Сколькими способами можно разбить 5-элементное множество на непересекающиеся подмножества?
7. Количество способов, которыми можно разбить n-элементное множество на непересекающиеся подмножества $B_n = \sum_{k=1}^{n} S_n^k$, называется число Белла. Докажите рекуррентное соотношение $B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k B_k$. Используя эту формулу, найдите B_6.
8. Используя формулу для числа сюрьекций, получите явное (хоть и очень громоздкое) выражение для чисел Стирлинга.
9. Пусть V_k – пространство многочленов степени не выше k от переменной *x*. Выпишите матрицу перехода от базиса $\{1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\ldots(x-k+1)\}$ к базису $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$.