Производящие функции

Определение. Производящей функцией последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется формальный ряд $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$

Примеры

1. Ряд единиц $1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$. Доказать это равенство можно с помощью процедуры умножения многочлена на формальный ряд.
2. Натуральный ряд $1 + 2x + \ldots + nx^n + \ldots = \left(1 + x + \ldots + x^n + \ldots\right)^2 = \frac{1}{\left(1-x\right)^2}$.
3. Обобщение: $\left(1-x\right)^{-k} = \left(1 + x + \ldots + x^n + \ldots\right)^k = 1 + C_k^1 x + \left(C_k^1 + C_k^2\right) x^2 + \ldots = 1 + C_k^1 x + C_{k+1}^2 x^2 + \ldots$

   Гипотеза: $\left(1-x\right)^{-k} = \sum_{i=1} C_{k+i-1}^i x^i$. Доказательство по индукции с помощью анализа равенства

   $\left(1 + x + \ldots + x^n + \ldots\right)\left(1 + C_k^1 x + C_{k+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+k-2}^{n-1} x^{n-1} + C_{n+k-1}^n x^n + \ldots\right) =$

   $1 + C_{k+1}^1 x + C_{k+2}^2 x^2 + \ldots + C_{n+k-1}^{n-1} x^{n-1} + C_{n+k}^n x^n + \ldots$

   Сводится к равенству $C_{n+k}^n = 1 + C_k^1 + C_{k+1}^2 + \ldots + C_{n+k-2}^{n-1} + C_{n+k-1}^n$

   Следствие 1: $\left(1+x\right)^{-k} = \sum_{i=1} \left(-1\right)^i C_{k+i-1}^i x^i$.

   Следствие 2 (частный случай формулы Ньютона)

   $$\left(a+b\right)^{-k} = a^{-k}\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-k} = a^{-k} \sum_{i=1} \left(-1\right)^i C_{k+i-1}^i \left(\frac{b}{a}\right)^i = \sum_{i=1} \left(-1\right)^i C_{k+i-1}^i a^{-k-i} b^i =$$

   $$\sum_{i=1} \left(-1\right)^i \frac{\left(k+i-1\right)\left(k+i-2\right)\ldots k}{i!} a^{-k-i} b^i = \sum_{i=1} \frac{\left(-k\right)\left(-k-1\right)\ldots\left(-k-i+1\right)}{i!} a^{-k-i} b^i = \sum_i C_{-k}^i a^{-k-i} b^i.$$

   Следствия для $(1+x)^k$ и $(a+b)^k$
4. Извлечение квадратного корня (ещё один частный случай)
   Гипотеза (пока без доказательства):

   $$\left(1+x\right)^{1/2} = \sum_{i=1} C_{1/2}^i x^i = \sum_i \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - i + 1\right)}{i!} x^i = \sum_i \frac{\left(-1\right)^{i-1} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left(2i-3\right)}{2^i\, i!} x^i$$

   $$= \sum_i \frac{\left(-1\right)^{i-1} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left(2i-3\right)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2i} x^i = \sum_i \frac{\left(-1\right)^{i-1} \left(2i-2\right)!}{i\left(\left(i-1\right)!\right)^2 \cdot 2^{2i-1}} x^i = \sum_i \frac{\left(-1\right)^{i-1}}{i \cdot 2^{2i-1}} C_{2i-2}^{i-1} x^i$$
5. Характеристическое соотношение для последовательности Каталана.
   Пусть $f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n + \ldots$ Положим

   $$F\left(x\right) = x f(x) \Rightarrow F^2\left(x\right) = F(x) - x \Rightarrow F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$