Материалы к семинарам по матанализу (третий семестр)

5-я и 6-я недели (1–12.10.2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 5–6. Различные виды сходимости. Интеграл Лебега

1. Алгебра измеримых функций
2. Сходимость поточечная и почти всюду. Измеримость предельной функции
3. Теорема Егорова
4. Теорема Лузина
5. Алгебра ограниченных простых функций. Определение интеграла Лебега и его существование для ограниченных измеримых функций
6. Элементарные свойства интеграла Лебега: линейность, аддитивность, абсолютная непрерывность

Примерные задачи семинаров

Различные виды сходимости

Задача 3.1. Привести пример последовательности функций, сходящейся к нулю, но не равномерно.

Задача 3.2. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = x^n$ на отрезке $[0; 1]$.

Задача 3.3. Доказать, что две непрерывные функции на отрезке эквивалентны относительно меры Лебега только тогда, когда они тождественно равны.

Задача 3.4. Построить измеримую по Лебегу функцию на отрезке, не эквивалентную никакой непрерывной функции.

Задача 3.5. Известно, что f_n сходится к f почти всюду и f_n сходится к g почти всюду. Доказать, что f эквивалентна g.

Задача 3.6. Построить последовательность функций $f_n\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$, сходящуюся к нулю по мере, для которой $\lim f_n(x)$ не существует ни в одной точке x.

Задача 3.7. Известно, что f_n сходится к f по мере и f_n сходится к g по мере. Доказать, что f эквивалентна g.

Следующие 2 задачи предлагается выдавать по очереди наиболее сильным студентам.

Задача 3.8. Всякая измеримая на отрезке $[a, b]$ функция f является почти всюду пределом последовательности f_n непрерывных функций.

Задача 3.9*. Всегда ли можно эту последовательность выбрать монотонной?

Задача 3.10. Доказать, что простая функция (т.е. функция, принимающая не более счетного множества значений) измерима тогда и только тогда, когда измеримы все ее множества уровня. Верно ли это для произвольных функций?

Задача 3.11. Доказать, что каждая измеримая функция может быть представлена в виде равномерного предела измеримых простых функций.

Интеграл Лебега

Здесь предлагается напомнить определение суммируемой простой функции.

Задача 3.12. Любая ли функция $[0;1] \to \mathbb{R}$, принимающая только значения 0 и 1, суммируема?

Задача 3.13. Любая ли измеримая простая функция $[0;1] \to \mathbb{R}$ суммируема?

Задача 3.14. Найти интеграл Лебега $\int_{[0;1]} f d\mu$ функции $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$, заданной формулами $f(0) = 0$ и $f(x) = (-1)^n 2^{n+1}/n$ при каждом $x \in (\frac{1}{2^{n+1}}; \frac{1}{2^n}]$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Здесь уместно напомнить определение суммируемой функции через равномерный предел простых.

Задача 3.15. Вычислите $\int_{[0,1]} x\, dx$ (сначала по определению, потом пользуясь следующей задачей).

Здесь уместно напомнить/разобрать задачу 3.11.

Задача 3.16. Пусть $\mu(E) < \infty$ и f — суммируемая функция на E. Доказать, что

$$\int_E f d\mu = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_k \xi_k \mu(\{x \in E : a_k < f(x) < a_{k+1}\}),$$

где $P = \{a_k\}$ — разбиение вещественной оси, $\Delta(P) = \sup_k |a_k - a_{k+1}|$ — диаметр разбиения P, а $\{\xi_k\}$ — любой набор точек, удовлетворяющий условию $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$. (Сумма в правой части называется интегральной суммой Лебега.)

Задача 3.17. Если $f(x) \le M$ почти всюду на и $\mu(E) < \infty$, то $|\int_E f d\mu| < M\mu(E)$.

Задача 3.18. Доказать, что интеграл от неотрицательной суммируемой функции f по любому измеримому множеству $E \subset [0;1]$ неотрицателен и равен нулю только тогда, когда $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Задача 3.19. При каких значениях параметров a и b функция $f(x) = x^a \sin^b x$, определенная на полуинтервале $(0;1]$,

а) суммируема,

б) несобственно интегрируема по Риману?

Задача 3.20.* Пусть $\mu(E) < \infty$. Доказать, что неотрицательная измеримая функция f на E суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(\{x \in E : f(x) \ge 2^n\}).$$

Дополнительные задачи

Задача 3.21. Доказать, что неотрицательная измеримая функция f суммируема на E тогда и только тогда, когда для всех простых функций g, не превосходящих по модулю f, интегралы $\int_E g d\mu$ ограничены одной и той же константой.

Задача 3.22. Для любой вещественной функции f положим $f_+(x) = (f(x)+|f(x)|)/2$, $f_-(x) = (|f(x)|-f(x))/2$. Доказать, что функция f суммируема тогда и только тогда, когда суммируемы функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$.

Задача 3.23. Доказать, что измеримая неотрицательная функция f суммируема тогда и только тогда, когда $\sup_E \int_E f d\mu < \infty$, где верхняя грань берется по всем множествам E конечной меры, на которых функция f ограничена сверху.

Задача 3.24.* Доказать, что функция на отрезке $[a,b]$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и почти всюду непрерывна.