Семинар 5.

Задача 1. Пусть A и B - линейные операторы в конечномерном пространстве V. Докажите, что $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(BA) + \dim(\mathrm{im}A \cap \ker B)$.

Задача 2. Пусть $A,\ B$ и C - линейные операторы в конечномерном пространстве V. Докажите, что $\mathrm{rank}(BA) + \mathrm{rank}(AC) \leqslant \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(BAC)$ (неравенство Фробениуса).

Задача 3. а) Является ли ядро линейного оператора f его собственным подпространством?
б) Пусть V_{λ_1} и V_{λ_2} - собственные подпространства в V, соответствующие двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2 линейного оператора f. Докажите, что $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.
в) Пусть e_1, e_2 - базис в V. Зададим линейный оператор f в V равенствами $f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = 4e_1$. Найдите собственные значения и собственные подпространства оператора f. Найдите ядро f.
г) Докажите, что если линейный оператор невырожден, то он и обратный к нему имеют одни и те же собственные векторы.

Задача 4. Докажите, что в пространстве $\mathbf{k}[x]_n$ многочленов степени $\leqslant n$ над полем $\mathbf{k}$ линейный оператор $A:\ f(x) \mapsto f(ax+b),\ a, b \in \mathbf{k}$, имеет собственные значения $1,\ a,\ a^2, ..., a^n$.

Задача 5. Докажите, что если оператор A^2 имеет собственное значение λ^2, то один из скаляров λ и $-\lambda$ является собственным значением оператора A.

Задача 6. Докажите, что если линейный оператор A в n-мерном пространстве имеет n различных собственных значений, то любой оператор, перестановочный с A, имеет базис, состоящий из его собственных векторов.

Задача 7. В пространстве $\mathbf{k}[x]_{\leqslant 5}$ степени $\leqslant 5$ над полем $\mathbf{k}$ рассмотрим оператор $A : f(x) \mapsto xf'(x)$. Докажите его линейность и найдите его матрицу в стандартном базисе $1, x, ..., x^5$. Найдите его собственные значения и собственные подпространства.

Задача 8. Найдите собственные подпространства оператора $A : f \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$ в пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$.

Задача 9. Подпространство U векторного пространства V называется *инвариантным подпространством линейного оператора* $A : V \to V$, если $A(U) \subset U$. Докажите, что:
а) если U - инвариантное подпространство линейного оператора $A : V \to V$, то характеристический многочлен оператора A делится на характеристический многочлен оператора $A|_U$;
б) сумма любого числа собственных подпространств оператора A является инвариантным подпространством оператора A.

Задача 10. В пространстве $\mathbb{R}^3$ найдите все подпространства, инвариантные относительно линейного оператора, заданного в стандартном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.