Лекция 4-18. Мера Лебега на прямой и канторова лестница. Алгебра измеримых функций

1 Построение множества фиксированной положительной хаусдорфовой размерности

Теорема 1 *Для любого $d \in (0,1)$ на единичном отрезке существует множество хаусдорфовой размерности d.*

Доказательство Докажем утверждение "$\leq d$". Модифицируем построение КСМ. Возьмем $l = 2^{\frac{1}{d}}$. Отрезки ранга n получаются из отрезков ранга $n-1$ как при классическом постороении, только отношение длин первых ко вторым равно $\frac{1}{l}$. Объединение отрезков ранга n обозначим через C_n и положим: $C = \cap C_n$. Множество C_n образует покрытие множества C. Его d-мерный объем равен 1. Следовательно, $\dim_H C \leq d$. $\square$

2 Свойства Хаусдорфовой размерности при Липшицевых и Гельдеровых отображеиях

Теорема 2 *При липшицеморфизме (гомеоморфизме, Липшицевом вместе обратным) хаусдорфова размерность не изменяется.*

Доказательство Доказательство немедленно следует из определения Хаусдорфовой размерности. $\square$

Теорема 3 *Пусть $X \subset E$, $\dim_H X = d$, и f - гельдерово отображение с показателем α. Тогда $\dim_H f(X) \leq \frac{d}{\alpha}$.*

Доказательство Пусть U - покрытие X. Тогда

$$V_{\frac{d}{\alpha}} = \sum |f(U_j)|^{\frac{d}{\alpha}} \leq \sum (C|U_j|^{\alpha})^{\frac{d}{\alpha}} = C^{\frac{d}{\alpha}} \sum |U_j|^d = C^{\frac{d}{\alpha}} V_d(U).$$

Теорема следует теперь из определения Хаусдорфовой размерности. $\square$

3 Хаусдорфова размерность канторова множества

Теорема 4 *Хаусдорфова размерность классического КСМ равна $\log_3 2$.*

Оценка

$$\dim_H(KCM) \le \log_3 2$$

доказана выше. Прямое доказательство обратной оценки несколько громоздко. Прозрачное, но не прямое, доказательство, предложено в листке. Его схема такова.

"Канторова лестница" отображает КСМ – множество меры 0 - на весь отрезок $[0, 1]$. Она удовлетворяет условию Гельдера (задача 17 листка). Это показывает, что гельдеровы отображения не уважают меру Лебега: могут перевести множество меры 0 в множество полной меры. Однако гельдеровы отображения уважают хаусдорфову размерность. Формализацией этого эвристического принципа является задача 16 листка. Это позволяет без вычислений доказать нижнюю оценку на $\dim_H(KCM)$.

4 Функция Кантора

Эта функция определяется как предел кусочно-линейных функций $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$. Определение индуктивное:

$$f_0 \equiv x,\ f_1' = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{на } [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ 0 & \text{на } (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

$f_1(0) = 0,\ f$ непрерывна. Функция f_{n+1} получается из функции f_n следующим образом: горизонтальные участки графика не меняются; наклонные, с сохранением граничных значений, перестраиваются так же, как функция f_0 превращалась в f_1.

Предложение 1 *Построенная выше последовательность f_n равномерно сходится. Предельная функция f_C нестрого монотонна и непрерывна.*

Определение 1 *Функция f_C из предложения 1 называется Канторовой функцией (или Канторовой лестницей).*

Прямое определение функции f_n.

Пусть C_n - объединение отрезков ранга n , полученных при построении КСМ. Положим:

$$f_n(x) = \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n},\ f_C = \lim f_n.$$

Задача. Докажите эквивалентность определений функции Кантора.

5 Самоподобие.

Продолжим функцию f_C на $\mathbb{R}$ до функции $\tilde{f}_C$, полагая

$$\tilde{f}_C(x) = 2^n f_C(3^{-n}x),\ x \in [3^{n-1}, 3^n).$$

Предложение 2 *Функция* $\tilde{f}_C$ *непрерывна и удовлетворяет условию:*

$$2\tilde{f}_C(\frac{x}{3}) = \tilde{f}_C(x),\ x > 0 \tag{1}$$

Доказательство Оператор $\Phi : f \mapsto g,\ g(x) = 2f(\frac{x}{3})|_{[0,1]}$ сдвигает построенную выше последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n \ldots$ на одну позицию влево. Предел сохраняется. $\square$

Следствие 1

$$\frac{\tilde{f}_C(x) - \tilde{f}_C(y)}{(x-y)^{\log_3 2}} = \frac{\tilde{f}_C(3x) - \tilde{f}_C(3y)}{(3x-3y)^{\log_3 2}}$$

Следствие 2 $\tilde{f}_C$ *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\log_3 2$.

Следствие 3 *Размерность классического КСМ* C *равна* $\log_3 2$.

Доказательство Образ КСМ под действием функции Кантора - весь отрезок. Его хаусдорова размерность равна 1. По теореме 6 лекции 3

$$1 \leq \frac{\dim_H C}{\log_3 2}.$$

Следовательно, $\dim_H C \geq \log_3 2$. Обратное неравенство доказано выше. $\square$

Задача. Докажите оценку снизу на размерность множеств, построенных в разделе 4 лекции 3.