Лекция 5-18. Измеримые функции и их сходимость

1 Алгебра измеримых функций.

Определение 1 *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима, если измеримо множество ее меньших значений $\{f < a\} \forall a$.*

Теорема 1 *Измеримые функции образуют алгебру.*

2 Три вида сходимости измеримых функций.

Определение 2 *Последовательность $f_n : E \to \mathbb{R}$ сходится равномерно к функции f, если $\forall \varepsilon > 0$*

$$\exists N : n > N \Rightarrow |f - f_n| < \varepsilon.$$

Определение 3 *Последовательность $f_n : E \to \mathbb{R}$ сходится поточечно, если $\forall x \in E$*

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) := f(x).$$

Определение 4 *Последовательность $f_n : E \to \mathbb{R}$ сходится почти всюду, если для почти всех $x \in E$*

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) := f(x).$$

Определение 5 *Последовательность $f_n : E \to \mathbb{R}$ сходится к функции f по мере (Лебега), если $\forall \varepsilon > 0$*

$$\mu\{x | |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \to 0 \ as \ n \to \infty.$$

Примеры 1 1) *Пусть f_n, f_C функции из раздела 5. Тогда $f_n \to f_C$ поточечно.*

2) *$f'_n \to 0$ почти всюду.*

Теорема 2 *Равномерная сходимость $\Rightarrow$ сходимость почти всюду $\Rightarrow$ сходимость по мере.*

Доказательство Импликации: Равномерная сходимость $\Rightarrow$ сходимость почти всюду и Равномерная сходимость $\Rightarrow$ сходимость по мере очевидны. Импликация: Сходимость почти всюду $\Rightarrow$ сходимость по мере будет доказана на следующей лекции. $\square$

3 Измеримость предела

Теорема 3 *Предел сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций - измеримая функция.*

Доказательство Пусть $f_n \to f$ п. в. Тогда

$$\{f < a\} = \cup_k \cup_N \cap_{n>N} \{f_n < a - \frac{1}{k}\}.$$

$\square$

Теорема 4 *Предел сходящейся по мере последовательности измеримых функций - измеримая функция.*

Эта теорема включена в листок.

4 Теорема Егорова

Теорема 5 *Пусть последовательность функций $f_n : E \to \mathbb{R}$ сходится почти всюду. Тогда для любого ε существует множество меры больше $1 - \varepsilon$, на котором (f_n) сходится равномерно.*

Доказательство По предыдущей теореме предельная функция f измерима.

Лемма 1 *Пусть $f_n \to f$ почти всюду. Тогда $\forall \varepsilon, \delta\ \exists E_{\varepsilon,\delta}$ и N такие, что $\mu(CE_{\varepsilon,\delta}) < \delta$ и $|f - f_n||_{E_{\varepsilon,\delta}} < e \forall n > N$.*

Теорема Егорова легко следует из леммы. Нужно применить лемму к последовательности $\varepsilon_k = \frac{1}{k}, \delta_k = \delta 2^{-k}$. $\square$