Задачи в листках, помеченные буквой “B”, являются бонусными. За их решение будут начисляться дополнительные баллы.

Гильбертовы пространства

2.1. Пусть $H = C[-1,1]$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Положим

$$H_0 = \left\{ f \in H : \int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)\,dt \right\}.$$

(a) Докажите, что H_0 — замкнутое векторное подпространство в H.
(b) Верно ли, что $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$?

2.2. Докажите, что в любом неполном евклидовом пространстве H существует такое замкнутое векторное подпространство H_0, что $H_0 \oplus H_0^{\perp} \neq H$.

2.3. Докажите, что пространство $C_c^{\infty}(a,b)$ гладких функций с компактным носителем на интервале (a,b) плотно в $L^p[a,b]$ для всех $1 \leqslant p < \infty$.

Определение 2.1. Пусть $f \in L^2[a,b]$. Функция $f' \in L^2[a,b]$ называется *обобщенной производной* функции $f \in L^2[a,b]$, если

$$\int_a^b f'\varphi\,dt = -\int_a^b f\varphi' dt$$

для всех $\varphi \in C_c^{\infty}(a,b)$.

2.4. Докажите, что если $f \in L^2[a,b]$ обладает обобщенной производной f', то f' единственна (как элемент пространства $L^2[a,b]$).

2.5 (*пространство Соболева*)**.** Обозначим через $W^{1,2}(a,b)$ множество всех $f \in L^2[a,b]$, обладающих обобщенной производной $f' \in L^2[a,b]$. Докажите, что $W^{1,2}(a,b)$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b (f\bar{g} + f'\bar{g}')\,dt.$$

2.6 (*пространство Харди*)**.** Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через H^2 пространство всех голоморфных функций $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2\,d\varphi \right)^{1/2} < \infty.$$

Докажите, что отображение $f \mapsto (c_n(f))_{n\geqslant 0}$, где $c_n(f)$ — n-ый тейлоровский коэффициент функции f в нуле, является изометрическим изоморфизмом между $(H^2, \|\cdot\|)$ и $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$. Таким образом, H^2 — гильбертово пространство.

2.7-B (*пространство Бергмана*)**.** Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через $L_a^2(\mathbb{D})$ пространство всех голоморфных функций $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2\,dx\,dy \right)^{1/2} < \infty.$$

Докажите, что $L_a^2(\mathbb{D})$ — замкнутое векторное подпространство в $L^2(\mathbb{D})$. Следовательно, $L_a^2(\mathbb{D})$ — гильбертово пространство.

Линейные операторы

2.8. Зафиксируем точку $t_0 \in [a,b]$ и рассмотрим линейный функционал

$$F\colon (C[a,b], \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}, \quad F(x) = x(t_0).$$

(a) При каких $p \in [1,+\infty]$ функционал F ограничен? **(b)** Найдите его норму.

2.9. Пусть $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. *Диагональный оператор* $M_\alpha\colon X \to X$ переводит вектор $x \in X$ в вектор $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.
(a) Докажите, что M_α ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

2.10. Пусть (X,μ) — пространство с σ-конечной мерой, и пусть $f\colon X \to \mathbb{K}$ — существенно ограниченная измеримая функция. Зафиксируем $p \in [1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f\colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in L^p(X,\mu)).$$

(a) Докажите, что M_f ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

2.11. Пусть $X = L^p[0,1]$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ или $X = C[0,1]$. Определим оператор $T\colon X \to X$ формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (f \in X).$$

(a) Докажите, что T ограничен. **(b)** Для случаев $X = C[0,1]$ и $X = L^1[0,1]$ вычислите его норму.

Анонс: если рассматривать этот оператор в пространстве $L^2[0,1]$, то его норма равна $2/\pi$. В свое время мы это сможем доказать.

2.12. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X\times X, \mu\times\mu)$. *Интегральный оператор Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y).$$

Докажите, что T действительно отображает $L^2(X,\mu)$ в $L^2(X,\mu)$, что он ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$.

2.13. Линейный функционал F на $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ задан формулой

$$F(f) = 2f(0) - 3f(1) + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

(a) Докажите, что F ограничен. **(b)** Вычислите $\|F\|$.

2.14. Пусть H^2 — пространство Харди (см. задачу 2.6).
(a) Докажите, что для каждого $w \in \mathbb{D}$ линейный функционал $F_w\colon H^2 \to \mathbb{C}$, $F_w(f) = f'(w)$, ограничен.
(b) В силу теоремы Рисса и п. (a), для каждого $w \in \mathbb{D}$ существует единственная функция $g_w \in H^2$, удовлетворяющая условию $F_w(f) = \langle f, g_w\rangle$ для всех $f \in H^2$. Найдите явную формулу для $g_w(z)$.

2.15-B. Пусть $L^2_a(\mathbb{D})$ — пространство Бергмана (см. задачу 2.7-B).
(a) Докажите, что для каждого $w \in \mathbb{D}$ линейный функционал $F_w\colon L^2_a(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$, $F_w(f) = f(w)$, ограничен.
(b) В силу теоремы Рисса и п. (a), для каждого $w \in \mathbb{D}$ существует единственная функция $g_w \in L^2_a(\mathbb{D})$, удовлетворяющая условию $F_w(f) = \langle f, g_w\rangle$ для всех $f \in L^2_a(\mathbb{D})$. Найдите явную формулу для $g_w(z)$.